



# ESCOLA NAVAL

ta tante bi faire



ASPOF M Cecília Branco de Almeida

## **Estudo de modelos de esteira oscilante com diferentes tipos de acoplamento**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais,  
na especialidade de Marinha



Alfeite  
2020





# ESCOLA NAVAL

ta sânto e biefaire



**ASPOF M Cecília Branco de Almeida**

***Estudo de modelos de esteira oscilante com diferentes  
tipos de acoplamento***

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre**

**em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha**

**Orientação de: Professor Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira**

**Co-orientação de: Professor Vincent Debut**

O Aluno Mestrando

O Orientador

*Cecilia Branco de Almeida*

*Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira*

---

ASPOF M Branco de Almeida

---

Miguel Moreira

**Alfeite**

**2020**



"Pedras no caminho? Guardo-as todas, um dia vou construir um castelo..."  
Fernando Pessoa



# Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus pais por me ensinarem que, com esforço e resiliência, o que inicialmente parece inalcançável, acaba por se tornar possível. Agradeço também ao meu irmão por me incentivar sempre a lutar pelos meus objetivos, me apoiar e ser um exemplo para mim.

Não posso deixar de fazer um agradecimento especial ao sr. Prof. Miguel Moreira por ter sido muito mais do que um orientador. Demonstrou uma dedicação, ajuda e paciência que poucas pessoas conseguem atingir. Todo o conhecimento que partilhou comigo, assim como a troca de “palavras que mudam o mundo”, torna-o, não só, uma referência a seguir, mas também uma inspiração.

Aos professores Vincent Debut, José Vieira Antunes e Ana Luísa Correia, agradeço todas as sugestões e comentários ao longo do trabalho, assim como, todo o interesse e ajuda prestados.

Gostaria ainda de agradecer à Mafaldinha por animar sempre o meu local de trabalho com a sua alegria e energia contagiantes, ao Diogo pela ajuda nos momentos mais difíceis e aos meus amigos por todo o apoio e consideração.





# Resumo

## Modelos de esteira oscilante

A dinâmica de uma estrutura esbelta sujeita a um escoamento transversal é um problema que se enquadra no contexto das Vibrações Induzidas por Vórtices (VIV). A sua abordagem recorre geralmente a modelos semi-empíricos tais como, os modelos de esteira oscilante, cujas soluções permitem descrever a dinâmica referida. São compostos por duas equações diferenciais acopladas: uma equação diferencial não linear de 2ª ordem que descreve a esteira oscilante, normalmente a equação de Van de Pol, acoplada a uma equação diferencial linear de 2ª ordem que descreve o comportamento da estrutura esbelta.

Neste trabalho, várias formulações para os modelos de esteira oscilante são apresentadas e discutidas. Um estudo numérico das respostas vibratórias da esteira e da estrutura para o acoplamento em aceleração, em velocidade e em deslocamento, separadamente e também para uma combinação dos três acoplamentos, é apresentado. Para esta última formulação, recorre-se ainda a dados experimentais e à técnica de Simulação do Recozimento, para calibração dos parâmetros desconhecidos. O desempenho de cada formulação é apresentado e discutido.

Palavras-chave: Vibrações induzidas por vórtices (VIV), modelos de esteira oscilante



# Abstract

## **Wake oscillator models**

The dynamics of a slender structure subjected to a transverse flow is a complex problem that fits in the context of Vortex-Induced Vibrations (VIV). The understanding of such dynamics is of great interest in the design and maintenance of numerous systems with great economic impact in areas of civil engineering and maritime structures among many others. The study of these phenomena generally involves the use of semi-empirical models such as the wake oscillator models whose solutions can describe this dynamics. Wake oscillator models consist of two coupled differential equations: a second-order nonlinear differential equation (typically the Van der Pol equation) describing the wake, coupled with a second order linear differential equation describing the behaviour of the slender structure.

In this work, different formulations for the wake oscillator models are presented and discussed. Based on numerical simulations, the vibratory response of both wake and structure, is analyzed. One approach consists in study each coupling - acceleration, velocity and displacement - separately. In the other approach, a combination of these three couplings is presented. In order to deal with the unknown parameters that emerge from this last approach, the Simulated Annealing method was implemented, based on experimental data. Each formulation performance for the wake oscillator models is presented and discussed.

Keywords: Vortex-Induced Vibrations (VIV), Wake-oscillator models



# Índice Geral

Epígrafe	I
Agradecimentos	III
Resumo	V
Abstract	VII
Índice Geral	IX
Índice de Figuras	XIII
Índice de Tabelas	XIX
Lista de Acrónimos e Abreviaturas	XXI
Prefácio	XXIII
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Libertação de vórtices . . . . .	2
1.3 Modelos de esteira oscilante . . . . .	3
1.4 Algumas aplicações para os modelos de esteira oscilante . . . .	4
1.5 Objetivos . . . . .	4
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	<b>7</b>
2.1 Vibrações mecânicas . . . . .	7
2.1.1 Descrição de um sistema mecânico . . . . .	7
2.1.2 Classificação das vibrações . . . . .	8
2.1.3 Sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	10
2.2 Mecânica dos fluidos . . . . .	12
2.2.1 Descrição de um escoamento . . . . .	12

2.2.2	Números adimensionais . . . . .	19
2.3	Vibrações induzidas por vórtices . . . . .	20
2.3.1	Contexto na interação fluido-estrutura . . . . .	20
2.3.2	Acoplamento fluido-estrutura . . . . .	22
2.3.3	Números adimensionais . . . . .	23
2.3.4	Separação . . . . .	24
2.3.5	Movimento da estrutura . . . . .	25
2.4	Equações diferenciais não lineares . . . . .	27
2.4.1	Sistemas dinâmicos . . . . .	28
2.4.2	Sistemas auto-excitados . . . . .	31
2.4.3	Estabilidade . . . . .	32
2.4.4	Equações diferenciais não lineares: algumas abordagens	32
2.4.5	A equação de Van der Pol . . . . .	35
2.5	Modelação das vibrações induzidas por vórtices . . . . .	40
2.6	Otimização . . . . .	41
2.6.1	Técnicas de otimização . . . . .	42
2.6.2	Simulação de recozimento . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Modelos de esteira oscilante: acoplamentos isolados</b>	<b>45</b>
3.1	Formulação dimensional . . . . .	45
3.2	Formulação adimensional . . . . .	49
3.2.1	Adimensionalização com referência à oscilação da esteira	49
3.2.2	Adimensionalização com referência à oscilação da es- trutura . . . . .	52
3.3	Simulações numéricas . . . . .	53
3.3.1	Acoplamento em aceleração . . . . .	55
3.3.2	Acoplamento em velocidade . . . . .	63
3.3.3	Acoplamento em deslocamento . . . . .	70
3.4	Conclusões . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Modelos de esteira oscilante: acoplamento combinado</b>	<b>83</b>
4.1	Balanço harmónico . . . . .	84
4.1.1	Resposta da esteira forçada harmonicamente . . . . .	85
4.2	Formulação do problema de otimização . . . . .	87
4.3	Estabelecimento do algoritmo de otimização . . . . .	89
4.4	Calibração dos parâmetros . . . . .	90
4.5	Resultados obtidos . . . . .	93
4.6	Estudo numérico do acoplamento combinado . . . . .	96
4.7	Conclusões . . . . .	100

<b>5</b>	<b>Conclusões e trabalho futuro</b>	<b>103</b>
5.1	Conclusões . . . . .	103
5.2	Trabalho Futuro . . . . .	104
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Modelo de esteira oscilante - adimensionalização</b>	<b>109</b>
A.1	Adimensionalização referida à estrutura . . . . .	110
A.2	Adimensionalização referida à esteira . . . . .	113
<b>B</b>	<b>Simulações temporais</b>	<b>115</b>
B.1	Acoplamento em aceleração . . . . .	115
B.2	Acoplamento em velocidade . . . . .	126
B.3	Acoplamento em deslocamento . . . . .	137
<b>C</b>	<b>Esteira forçada por uma força harmónica</b>	<b>149</b>
C.1	Resposta da esteira forçada harmonicamente . . . . .	149
<b>D</b>	<b>Resposta acoplada da esteira-estrutura</b>	<b>151</b>
D.1	Modelo adimensional referido à frequência da esteira . . . . .	151
D.1.1	Oscilador fluido . . . . .	151
D.1.2	Oscilador estrutura . . . . .	152
D.2	Modelo adimensional referido à frequência da estrutura . . . . .	153
D.2.1	Oscilador-fluido . . . . .	153
D.2.2	Oscilador-estrutura . . . . .	154
<b>E</b>	<b>Acoplamento combinado</b>	<b>157</b>
E.1	Equações a ajustar . . . . .	157
E.2	Constantes conhecidas . . . . .	160
<b>F</b>	<b>Produção científica precedente</b>	<b>163</b>





# Índice de Figuras

2.1	Vibração livre amortecida: vibração de cordas.* . . . . .	8
2.2	Vibração forçada: Sistema forçado por uma força externa harmónica (esq.); e por um deslocamento dependente do tempo (dir).* . . . . .	9
2.3	Vibração auto-excitada: Sustentação na asa de um avião.* . . . .	9
2.4	Sistema com um grau de liberdade.* . . . . .	10
2.5	Linhas de corrente.* . . . . .	15
2.6	Direção do escoamento: a) move-se para a direita se a $\psi$ aumenta; b) move-se para a esquerda se a $\psi$ diminui.* . . . .	16
2.7	Interação entre a região viscosa e não viscosa de um corpo sujeito a um escoamento : a) escoamento ideal; b) escoamento real.* . . . . .	17
2.8	a) Duas camadas de corte formadas no perfil de escoamento resultando em b) libertação de vórtices.* . . . . .	21
2.9	Separação da camada limite.* . . . . .	24
2.10	Estrada de vórtices estável com 2 vórtices formados por ciclo de vibração.* . . . . .	26
2.11	Estrada de vórtices instável com 3 vórtices formados por ciclo de vibração.* . . . . .	26
2.12	Tipos de ciclos limite.* . . . . .	30
2.13	Trajetoórias da equação de Van der Pol para $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	37
2.14	Gráfico de $x$ vs $t$ para a trajetória de $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	38
2.15	Trajetoórias da equação de Van der Pol para $\varepsilon = 5$ . . . . .	38
2.16	Gráfico de $x$ vs $t$ para a trajetória de $\varepsilon = 5$ . . . . .	39
3.1	Resposta temporal para $Ur = 2.0$ - acoplamento em aceleração.	56
3.2	Resposta frequencial para $Ur = 2.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	56
3.3	Resposta temporal para $Ur = 5.0$ - acoplamento em aceleração.	57
3.4	Resposta frequencial para $Ur = 5.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	57

3.5	Resposta temporal para $Ur = 9.0$ - acoplamento em aceleração.	58
3.6	Resposta frequencial para $Ur = 9.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	59
3.7	Waterfall cilindro - acoplamento em aceleração. . . . .	60
3.8	Waterfall esteira - acoplamento em aceleração. . . . .	61
3.9	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 0.50$ - acoplamento em aceleração. . . . .	62
3.10	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 3.60$ - acoplamento em aceleração. . . . .	62
3.11	Resposta temporal para $Ur = 2.0$ - acoplamento em velocidade.	64
3.12	Resposta frequencial para $Ur = 2.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	64
3.13	Resposta temporal para $Ur = 8.0$ - acoplamento em velocidade.	65
3.14	Resposta frequencial para $Ur = 8.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	66
3.15	Resposta temporal para $Ur = 10.0$ - acoplamento em velocidade.	66
3.16	Resposta frequencial para $Ur = 10.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	67
3.17	Waterfall cilindro - acoplamento em velocidade. . . . .	68
3.18	Waterfall esteira - acoplamento em velocidade. . . . .	68
3.19	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 0.50$ - acoplamento em velocidade. . . . .	69
3.20	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 3.60$ - acoplamento em velocidade . . . . .	70
3.21	Resposta temporal, para $Ur = 2.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	71
3.22	Resposta frequencial, para $Ur = 2.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	72
3.23	Resposta temporal, para $Ur = 5.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	72
3.24	Resposta frequencial, para $Ur = 5.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	73
3.25	Resposta temporal, para $Ur = 9.5$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	74
3.26	Resposta frequencial, para $Ur = 9.5$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	74
3.27	Waterfall cilindro - acoplamento em deslocamento. . . . .	75
3.28	Waterfall esteira - acoplamento em deslocamento. . . . .	76
3.29	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 0.50$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	77

3.30	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 3.60$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	77
3.31	Atenuação do comportamento vibratório, resposta temporal, para $Ur = 5.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	78
3.32	Atenuação do comportamento vibratório, resposta frequencial, para $Ur = 5.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	79
4.1	Relação entre amplitude harmónica $y_0$ e frequência $Ur$ da resposta. . . . .	87
4.2	Evolução da calibração de $M$ , para $Sc = 0.50$ . . . . .	95
4.3	Evolução da calibração de $A, B, C, \varepsilon$ , para $Sc = 0.50$ . . . . .	95
4.4	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 0.50$ , com $M$ ajustado - acoplamento combinado. . . . .	98
4.5	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 3.60$ , com $M$ ajustado - acoplamento combinado. . . . .	98
4.6	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 0.50$ , com $M$ analítico - acoplamento combinado . . . . .	99
4.7	Resposta temporal, em <i>lock-in</i> , para $Sc = 3.60$ , com $M$ analítico - acoplamento combinado . . . . .	100
B.1	Resposta temporal para $Ur = 1.0$ - acoplamento em aceleração.	116
B.2	Resposta temporal para $Ur = 2.0$ - acoplamento em aceleração.	116
B.3	Resposta temporal para $Ur = 3.0$ - acoplamento em aceleração.	117
B.4	Resposta temporal para $Ur = 4.0$ - acoplamento em aceleração.	117
B.5	Resposta temporal para $Ur = 5.0$ - acoplamento em aceleração.	118
B.6	Resposta temporal para $Ur = 6.0$ - acoplamento em aceleração.	118
B.7	Resposta temporal para $Ur = 7.0$ - acoplamento em aceleração.	119
B.8	Resposta temporal para $Ur = 8.0$ - acoplamento em aceleração.	119
B.9	Resposta temporal para $Ur = 9.0$ - acoplamento em aceleração.	120
B.10	Resposta temporal para $Ur = 10.0$ - acoplamento em aceleração.	120
B.11	Resposta frequencial para $Ur = 1.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	121
B.12	Resposta frequencial para $Ur = 2.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	122
B.13	Resposta frequencial para $Ur = 3.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	122
B.14	Resposta frequencial para $Ur = 4.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	123
B.15	Resposta frequencial para $Ur = 5.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	123

B.16 Resposta frequencial para $Ur = 6.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	124
B.17 Resposta frequencial para $Ur = 7.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	124
B.18 Resposta frequencial para $Ur = 8.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	125
B.19 Resposta frequencial para $Ur = 9.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	125
B.20 Resposta frequencial para $Ur = 10.0$ - acoplamento em aceleração. . . . .	126
B.21 Resposta temporal para $Ur = 1.0$ - acoplamento em velocidade.127	
B.22 Resposta temporal para $Ur = 2.0$ - acoplamento em velocidade.127	
B.23 Resposta temporal para $Ur = 3.0$ - acoplamento em velocidade.128	
B.24 Resposta temporal para $Ur = 4.0$ - acoplamento em velocidade.128	
B.25 Resposta temporal para $Ur = 5.0$ - acoplamento em velocidade.129	
B.26 Resposta temporal para $Ur = 6.0$ - acoplamento em velocidade.129	
B.27 Resposta temporal para $Ur = 7.0$ - acoplamento em velocidade.130	
B.28 Resposta temporal para $Ur = 8.0$ - acoplamento em velocidade.130	
B.29 Resposta temporal para $Ur = 9.0$ - acoplamento em velocidade.131	
B.30 Resposta temporal para $Ur = 10.0$ - acoplamento em velocidade.131	
B.31 Resposta frequencial para $Ur = 1.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	132
B.32 Resposta frequencial para $Ur = 2.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	133
B.33 Resposta frequencial para $Ur = 3.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	133
B.34 Resposta frequencial para $Ur = 4.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	134
B.35 Resposta frequencial para $Ur = 5.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	134
B.36 Resposta frequencial para $Ur = 6.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	135
B.37 Resposta frequencial para $Ur = 7.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	135
B.38 Resposta frequencial para $Ur = 8.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	136
B.39 Resposta frequencial para $Ur = 9.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	136
B.40 Resposta frequencial para $Ur = 10.0$ - acoplamento em velocidade. . . . .	137

B.41 Resposta temporal para $Ur = 1.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	138
B.42 Resposta temporal para $Ur = 2.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	138
B.43 Resposta temporal para $Ur = 3.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	139
B.44 Resposta temporal para $Ur = 4.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	139
B.45 Resposta temporal para $Ur = 5.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	140
B.46 Resposta temporal para $Ur = 6.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	140
B.47 Resposta temporal para $Ur = 7.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	141
B.48 Resposta temporal para $Ur = 8.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	141
B.49 Resposta temporal para $Ur = 9.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	142
B.50 Resposta temporal para $Ur = 10.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	142
B.51 Resposta frequencial para $Ur = 1.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	143
B.52 Resposta frequencial para $Ur = 2.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	144
B.53 Resposta frequencial para $Ur = 3.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	144
B.54 Resposta frequencial para $Ur = 4.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	145
B.55 Resposta frequencial para $Ur = 5.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	145
B.56 Resposta frequencial para $Ur = 6.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	146
B.57 Resposta frequencial para $Ur = 7.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	146
B.58 Resposta frequencial para $Ur = 8.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	147
B.59 Resposta frequencial para $Ur = 9.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	147
B.60 Resposta frequencial para $Ur = 10.0$ - acoplamento em deslocamento. . . . .	148



# Índice de Tabelas

3.1	Principais parâmetros estruturais. . . . .	54
3.2	Principais parâmetros do fluido, do escoamento e da esteira. . .	54
3.3	Principais parâmetros geométricos e físicos, para qualquer $Sc$ . . .	61
3.4	Parâmetros físicos para $Sc = 0.50$ , $Sc = 3.60$ . . . . .	61
3.5	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para $Sc =$ 0.50 - acoplamento em aceleração. . . . .	63
3.6	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para $Sc =$ 3.60 - acoplamento em aceleração. . . . .	63
3.7	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para $Sc =$ 0.50 - acoplamento em velocidade. . . . .	69
3.8	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para $Sc =$ 3.60 - acoplamento em velocidade. . . . .	70
3.9	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para $Sc =$ 0.50 - acoplamento em deslocamento. . . . .	76
3.10	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para $Sc =$ 3.60 - acoplamento em deslocamento. . . . .	78
3.11	Atenuação do comportamento vibratório, acoplamento em deslo- camento. . . . .	79
3.12	Atenuação do comportamento vibratório, acoplamento em ve- locidade. . . . .	80
3.13	Atenuação do comportamento vibratório, acoplamento em ace- leração. . . . .	80
4.1	Dados experimentais referentes a $Sc = 0.50$ . . . . .	91
4.2	Dados experimentais referentes a $Sc = 2.18$ . . . . .	91
4.3	Dados experimentais referentes a $Sc = 3.60$ . . . . .	92
4.4	Parâmetros a ajustar. . . . .	92
4.5	Parâmetros reais adimensionalizados. . . . .	93
4.6	Resultados alcançados para $Sc = 0.50$ . . . . .	93
4.7	Resultados alcançados para $Sc = 2.18$ . . . . .	93
4.8	Resultados alcançados para $Sc = 3.60$ . . . . .	94
4.9	Principais parâmetros geométricos e físicos, para qualquer $Sc$ . . .	96

4.10	Parâmetros físicos para $Sc = 0.50, Sc = 3.60$ . . . . .	96
4.11	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com $M$ ajustado, para $Sc = 0.50$ . . . . .	97
4.12	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com $M$ ajustado, para $Sc = 3.60$ . . . . .	97
4.13	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com $M$ analítico, para $Sc = 0.50$ . . . . .	99
4.14	Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com $M$ analítico, para $Sc = 3.60$ . . . . .	99



# Lista de Acrónimos e Abreviaturas

DOF's	<i>Degrees of Freedom</i>
HAM	<i>Homotopy Analysis Method</i>
MMA	Massa Mola Amortecedor
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
SI	Sistema Internacional
VIV	<i>Vortex Induced Vibrations</i>
WOM	<i>Wake Oscillator Models</i>



# Prefácio

Esta dissertação de mestrado encontra-se dividida em 4 capítulos, cuja estrutura se apresenta de seguida.

No capítulo 1, que constitui a introdução, apresenta-se uma abordagem inicial ao tema das vibrações induzidas por vórtices. Enfatiza-se a importância do estudo desta temática e a motivação no contexto de aplicações com interesse teórico e económico para a Marinha. Uma abordagem possível para modelar o fenómeno de libertação de vórtices é o desenvolvimento de modelos de esteira oscilante. Providenciam-se, ainda, aplicações para estes modelos e definem-se os objetivos propostos para este trabalho.

No capítulo 2, elaborou-se o enquadramento teórico necessário para a realização e compreensão deste trabalho. Este capítulo está dividido em várias secções, nomeadamente, vibrações mecânicas, mecânica de fluidos, vibrações induzidas por vórtices, equações diferenciais não lineares, modelos de esteira oscilante e otimização.

No capítulo 3, inicia-se o estudo dos modelos de esteira oscilante, onde as suas diversas formulações são apresentadas e discutidas. Começa-se por descrever as formulações dimensional e adimensional, passando por estudar numericamente cada acoplamento (aceleração, velocidade e deslocamento) e inserindo a possibilidade de uma combinação dos três acoplamentos. Para esta última vertente, estabelecem-se as equações que permitem calibrar os parâmetros desconhecidos, formula-se o algoritmo que incorpora a técnica de simulação de recozimento e apresentam-se os resultados obtidos. Realiza-se, ainda, um estudo numérico para este acoplamento combinado.

No capítulo 4, discutem-se as conclusões relativas às diversas formulações de modelos de esteira oscilante e apresentam-se propostas de trabalhos futuros.

Em apêndice, encontram-se detalhes explicativos de cada formulação, gráficos de simulações temporais criados com o objetivo de testar as várias formulações e, ainda, artigos científicos realizados e apresentados em conferências da área da presente dissertação.



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Neste trabalho introduziremos os fenómenos de interação fluido-estrutura, as vibrações induzidas por escoamentos e as vibrações induzidas por vórtices. A importância destes tópicos será sublinhada no contexto das atividades de projeto e manutenção de estruturas. Seguidamente, abordaremos a caracterização e levantamento das propriedades físico-matemáticas relevantes associadas ao fenómeno de libertação de vórtices. Caracterizaremos e estabeleceremos os modelos de esteira oscilante destinados a descrever os fenómenos oscilatórios associados à ocorrência de escoamentos exteriores em torno de estruturas esbeltas. A motivação e a importância do adequado estudo destes modelos serão desenvolvidas no contexto de aplicações com interesse técnico e económico para a Marinha.

Sabe-se que as estruturas flexíveis vibram naturalmente. A vibração das estruturas quando excitadas é um fenómeno frequente e, às vezes, até desejado. A excitação das estruturas pode ter origem em diferentes processos naturais entre os quais podemos referir o efeito dos escoamentos dos fluidos, o ar e a água, por exemplo, em que as estruturas estão mergulhadas. Os efeitos dos ventos e das correntes sobre as estruturas, o comportamento que desencadeiam e alimentam, são bem conhecidos pela comunidade científica, veja-se (Blevins, 1990), (Axisa and (Eds.), 2007) ou (Nakamura et al., 2013). O estudo destes fenómenos é particularmente complexo, nomeadamente quando o comportamento do fluido e da estrutura não pode ser realizado separadamente e tem de ser abordado no contexto da interação fluido-estrutura.

À medida que a velocidade do escoamento aumenta, uma condição crítica pode ser atingida, dando-se a libertação de vórtices. A libertação de vórtices na zona da esteira, de estruturas esbeltas expostas a escoamentos exteriores,

transversos, é um fenómeno bem conhecido da engenharia e da física. Este fenómeno produz flutuações de pressão em torno da estrutura esbelta sujeita ao escoamento referido e é capaz de excitar a referida estrutura. Em certas condições particulares, não só podem vir a ser excitados movimentos vibratórios desconhecidos até aí, como também as amplitudes oscilatórias atingidas podem comprometer gravemente a estabilidade da estrutura quer de forma catastrófica quer por fadiga. A compreensão da dinâmica das vibrações induzidas por vórtices e dos modelos de esteira oscilante adquire, desta forma, especial relevância no dimensionamento, projeto e manutenção de numerosos sistemas com grande impacto económico em áreas da engenharia civil, mecânica e estruturas marítimas. Por exemplo, o colapso da ponte de Tacoma, em 1940 pode ser interpretado no contexto da interação fluido-estrutura (Billah and Scanlan, 1991).

Os modelos de esteira oscilante descrevem o comportamento duma estrutura esbelta sujeita a um escoamento transversal dum fluido. A libertação periódica de vórtices (*von Karman street*) e correspondente produção de forças periódicas que excitam a estrutura constituem um fenómeno designado por Vibração Induzida por Vórtices (VIV). Existe uma vasta literatura sobre este fenómeno, nomeadamente (Marris, 1964), (Bishop and Hassan, 1964), (Lienhard et al., 1966), (Novak, 1971), (Blevins, 1990).

## 1.2 Libertação de vórtices

Quando uma estrutura esbelta é sujeita a um escoamento exterior transversal, estacionário, de um fluido, pode observar-se uma libertação periódica de vórtices cuja frequência  $f$  de libertação se relaciona diretamente com o diâmetro exposto ao escoamento  $D$ , a sua velocidade média  $U$  e o número de Strouhal  $S_T$ , nas seguintes condições:

$$f_s = S_T \frac{U}{D} \quad (1.1)$$

Se a estrutura esbelta exposta ao escoamento transversal for, por exemplo, um tubo de diâmetro  $D$ , verifica-se que, para uma extensa gama de velocidades de escoamento, o número de Strouhal  $S_T$  mantém-se praticamente constante (White, 2017) e assume o valor  $S_T \approx 0.2$ . Este valor depende da geometria da estrutura e existem tabelas, veja-se por exemplo (Blevins, 1990), que relacionam as características geométricas da estrutura com o número de Strouhal.

Em muitas situações, as flutuações de pressão produzidas pela libertação de vórtices são audíveis. É o caso dos silvos "aeolianos" que podemos ouvir quando cabos elétricos suspensos são fustigados pelo vento.

Em certas circunstâncias, como já foi referido, o comportamento de um fluido em escoamento e da estrutura em movimento no seu seio, não pode ser realizado separadamente. O escoamento do fluido e o movimento da estrutura interagem entre si influenciando-se reciprocamente. Pode afirmar-se, tecnicamente falando, que os fenómenos descritos estão acoplados. Verificando-se o acoplamento entre o escoamento e a oscilação da estrutura, a periodicidade de libertação de vórtices pode passar a ser pilotada significativamente pela frequência natural oscilatória da estrutura. Este fenómeno é designado habitualmente por "*lock-in*". Quando tal acontece, as amplitudes oscilatórias da estrutura podem rapidamente evoluir para valores catastróficos. Edifícios esbeltos, tabuleiros de pontes, cabos submarinos, cabos de fixação de plataformas flutuantes, perfis sustentadores, hélices, feixes tubulares em permutadores de calor, constituem apenas alguns exemplos de estruturas sujeitas ao fenómeno acabado de descrever, veja-se (Facchinetti et al., 2004).

### 1.3 Modelos de esteira oscilante

A dinâmica de uma estrutura esbelta sujeita a um escoamento transversal é um problema complexo (com condições de fronteira móveis) que se enquadra no contexto das Vibrações Induzidas por Vórtices. A sua abordagem recorre geralmente a modelos semi-empíricos tais como, os modelos de esteira oscilante, cujas soluções permitem descrever a dinâmica referida.

Estes modelos conseguem descrever físico-matematicamente as principais características dinâmicas das respostas oscilatórias de estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos, nomeadamente o fenómeno de "*lock-in*". São compostos por duas equações diferenciais acopladas:

- Uma equação diferencial linear de 2ª ordem que descreve comportamento da estrutura e;
- uma equação diferencial não linear de 2ª ordem que descreve a esteira oscilante, normalmente a equação de Van de Pol.

Consulte-se (Facchinetti et al., 2004) para uma completa análise deste tema.

Nesta dissertação, os modelos de esteira oscilante serão alvo de estudo aprofundado, bem como, testados numericamente por via da escolha apropriada das variáveis de acoplamento utilizadas.

O papel da equação de Van der Pol (equação auto-excitada) no modelo de esteira oscilante mimetiza o papel do escoamento exterior no fornecimento da energia necessária à manutenção (ou mesmo amplificação) da amplitude

de oscilação da estrutura. Consultar (Srinil and Zanganeh, 2012), para um estudo mais aprofundado deste fenómeno.

## 1.4 Algumas aplicações para os modelos de esteira oscilante

A compreensão da dinâmica destes sistemas tem muito interesse no dimensionamento, projeto e manutenção de numerosos sistemas com grande impacto económico em áreas da engenharia civil e estruturas marítimas (edifícios esbeltos, torres, cabos, pontes, plataformas petrolíferas, bombas submersíveis, por exemplo), na indústria aeronáutica (perfis sustentadores), na indústria dos transportes marítimos (lemes, hélices), nas indústrias ligadas à produção de energia, indústria nuclear (permutadores de calor, armazenamento de barras de combustível nuclear), indústria química (de processamento), na acústica musical (flauta de bisel) e na bioengenharia (cordas vocais), nomeadamente.

Estudar os efeitos do fenómeno das vibrações induzidas por vórtices nas fases de aquisição, de projeto, de reformulação e de readaptação de estruturas é crucial para a manutenção (preventiva e corretiva) dessas mesmas estruturas. A criação e a disseminação de conhecimento nesta área, na Marinha, poderá ter um impacto muito positivo, quer em termos económicos quer operacionais.

## 1.5 Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudar os modelos de esteira oscilante uma vez que estes modelos têm elevado potencial de aplicação na Marinha. Neste sentido, será feito um estudo e análise das abordagens clássicas, nomeadamente, os acoplamentos isolados em aceleração, velocidade e deslocamento. E serão, ainda, ensaiadas novas abordagens, nomeadamente, acoplamentos combinados. Desta forma, os principais objetivos deste trabalho são:

- Estudar os modelos de esteira oscilante tendo em vista a disponibilização interna de conhecimento nesta área (passível de ser conhecido e utilizado);
- Estabelecer melhorias, criando conhecimento novo, na materialização destes modelos por via da escolha apropriada das variáveis de acoplamento utilizadas;



- Estabelecer melhorias, criando conhecimento novo, na materialização destes modelos por via de novas abordagens de formulação.

O trabalho desenvolvido irá assentar na determinação numérica das soluções temporais dos diferentes modelos e na identificação dos principais parâmetros vibratórios revelados. Os resultados serão analisados, avaliados, discutidos e comparados com dados existentes na literatura.



# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

### 2.1 Vibrações mecânicas

#### 2.1.1 Descrição de um sistema mecânico

Um sistema mecânico caracteriza-se por um conjunto de partículas que interagem umas com as outras. Os sistemas mecânicos flexíveis são constituídos por componentes estruturais (vigas, chapas...) com massa e elasticidade, estes são considerados sistemas contínuos, com um número infinito de graus de liberdade. Por esta razão, as vibrações destes sistemas reais são estabelecidas através de equações diferenciais parciais que envolvem variáveis dependentes do tempo e das coordenadas espaciais. Para o estudo das vibrações é preferível simplificar os sistemas reais em sistemas discretos, com um número finito de graus de liberdade. Estes são representados por uma massa concentrada, elementos elásticos discretos (molas de translação e torção) e elementos de amortecimento discretos (amortecedores). Os sistemas mecânicos com 1 grau de liberdade podem, geralmente, ser modelados por uma equação diferencial de segunda ordem.

Para determinar a posição de um sistema mecânico, são precisos exatamente  $n$  parâmetros. Estes são necessários para uma caracterização única da configuração do sistema e denominam-se de  $n$  graus de liberdade (*degrees of freedom* - DOF's). O número de graus de liberdade corresponde ao número de parâmetros independentes necessários para definir a posição de todas as massas num referencial. Por exemplo, se existirem  $N$  massas num sistema confinado apenas à translação na direção  $x$  e  $y$ , então este sistema terá  $2N$  graus de liberdade.

O modelo de um sistema mecânico tem tantos DOF's como os necessários para especificar o seu estado de deformação, dependendo do tipo de problema que se pretende resolver. Pode-se modelar uma estrutura como sendo

contínua (número infinito de DOF's), como um sistema de múltiplos graus de liberdade (número finito de DOF's) ou como um sistema de apenas um grau de liberdade.

Vejam-se os seguintes exemplos: 1 grau de liberdade - Um corpo rígido rodando sobre um eixo fixo; 2 graus de liberdade - Uma partícula movendo-se numa determinada superfície; 3 graus de liberdade - Um corpo rígido rodando sobre ponto fixo (no topo, por exemplo) (Lanczos, 1949).

### 2.1.2 Classificação das vibrações

As vibrações das estruturas podem apresentar diferentes graus de liberdade. Para cada classe de graus de liberdade, diferentes tipos de excitação são considerados. As excitações a que uma estrutura está sujeita vão influenciar o tipo de comportamento vibratório que estas irão experimentar. As vibrações podem ser classificadas em (Vladimír, 2012):

- Vibrações livres amortecidas - Ocorrem na ausência de uma força externa. Uma deslocação na posição de equilíbrio do sistema, ou o fornecimento de uma velocidade inicial ao sistema são causas possíveis para este tipo de vibração. A vibração de cordas dedilhadas é um exemplo de vibração livre, como se pode ver na Figura 2.1.

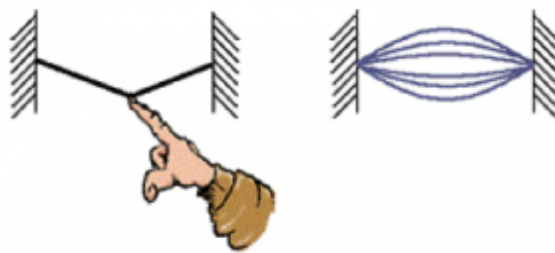


Figura 2.1: Vibração livre amortecida: vibração de cordas.\*

\*Retirado de Vladimír, 2012.

- Vibrações forçadas - Causadas por forças externas. Neste caso, essa força externa fornece continuamente energia ao sistema. Essa excitação pode ser proveniente de, por exemplo, uma força harmónica ou de um deslocamento dependente do tempo, veja-se a Figura 2.2.

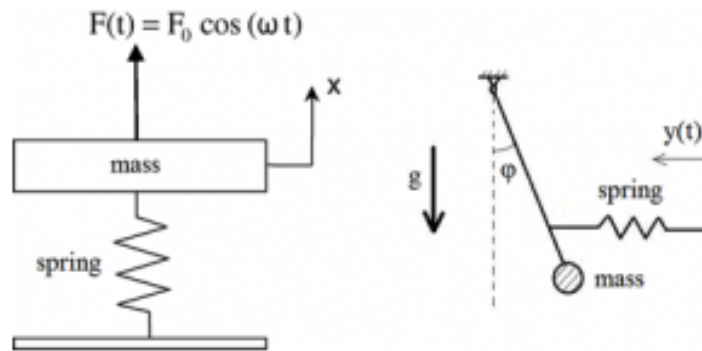


Figura 2.2: Vibração forçada: Sistema forçado por uma força externa harmônica (esq.); e por um deslocamento dependente do tempo (dir).\*

\*Retirado de Vladimír, 2012.

- Vibrações auto-excitadas - Oscilação periódica e determinística. Em certas condições, o estado de equilíbrio de um sistema torna-se instável e qualquer distúrbio provoca o aumento de perturbações, até que algum efeito as limite, geralmente um efeito não linear. A força é função de variáveis de movimento (deslocamento, velocidade ou aceleração), variando, portanto, com o movimento que produz. As vibrações induzidas por escoamentos inserem-se neste grupo, assim como a sustentação na asa de um avião, ver Figura 2.3, que se verifica imprescindível para que este consiga sustentar-se no ar.

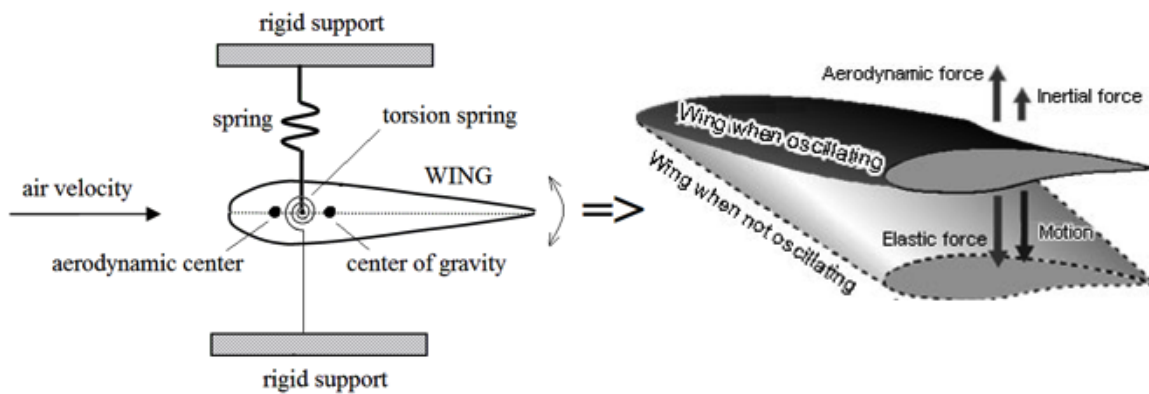


Figura 2.3: Vibração auto-excitada: Sustentação na asa de um avião.\*

\*Retirado de Vladimír, 2012.

As vibrações podem ter diversos impactos nas estruturas, nomeadamente, aumento de tensões, perda de resistência, desgaste adicional e fadiga. Por

exemplo, uma das consequências mais graves das vibrações forçadas é a ressonância dos sistemas mecânicos.

### 2.1.3 Sistema massa-mola-amortecedor

No âmbito do comportamento vibratório básico de uma estrutura, o modelo linear estrutural de um sistema mecânico com um grau de liberdade, como o típico sistema massa-mola-amortecedor (mma), será apresentado e caracterizado. No sistema mma, o corpo é representado pela sua massa que começa a vibrar quando é deslocada da sua posição de equilíbrio estável. O corpo continua em movimento à volta da sua posição de equilíbrio devido à força elástica associada à mola. Este sistema elementar de vibração tem o nome de oscilador mecânico.

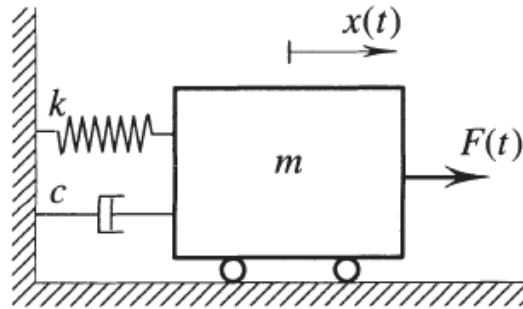


Figura 2.4: Sistema com um grau de liberdade.\*

\*Retirado de Thomsen, 2003.

No caso de amortecimento nulo, o sistema mma experimenta um movimento periódico harmónico com amplitude, frequência de vibração  $\omega$  e deslocamento constantes. Neste caso, a energia mecânica é conservada, fazendo com que o movimento harmónico se mantenha ao longo do tempo (William E. Boyce, 2001).

Nos casos em que o amortecimento é diferente de zero, verifica-se uma diminuição da energia mecânica total, da amplitude de vibração e do deslocamento ao longo do tempo (Vladimír, 2012).

O modelo mma, esquematizado na Figura 2.4, é caracterizado por uma massa,  $m$ , um coeficiente de rigidez,  $k$ , um coeficiente de amortecimento viscoso,  $c$ , e uma força de excitação  $F(t)$  e pode ser representado pela Equação diferencial linear de 2ª ordem (2.1), cuja solução é um movimento oscilatório forçado:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.1)$$

onde  $\dot{x} \equiv dx/dt$  e  $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$ . Esta equação representa um sistema com um grau de liberdade uma vez que a descrição do seu estado depende do conhecimento de apenas uma variável, a posição  $x$ . É uma equação diferencial linear de 2ª ordem de coeficientes constantes, cujas raízes ( $r$ ) têm a forma:

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \quad (2.2)$$

Suponha-se que,

$$c^2 - 4mk < 0, \quad (2.3)$$

fazendo com que o amortecimento,  $c$ , tenha de ser menor que  $2\sqrt{mk}$ . Este valor ( $2\sqrt{mk}$ ) tem o nome de amortecimento crítico ( $c_r$ ) e a razão entre  $c$  e  $c_r$ , designa-se por amortecimento reduzido  $\zeta$ .

Como  $c^2 - 4mk < 0$ , vem que:

$$0 < \zeta = \frac{c}{c_r} < 1 \quad (2.4)$$

Deste modo e com as devidas simplificações, a Equação (2.2), assume a forma:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.5)$$

onde  $\omega_n$ , representa a chamada "velocidade angular natural não amortecida".

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} \quad (2.6)$$

A frequência natural não-amortecida,  $f_n$ , representa a frequência da resposta oscilatória da equação se o amortecimento for nulo, isto é, se  $c = 0$ .

Por ser uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, as soluções reais da equação passam a ser:

$$x_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2i} = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \left[ \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right] \quad (2.7)$$

$$x_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left[ \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right] \quad (2.8)$$

e a solução geral do problema homogéneo:

$$x_{GH}(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos \left[ \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right] + Be^{-\zeta\omega_n t} \sin \left[ \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right] \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) também pode ser escrita na forma compactada:

$$x_{GH}(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin \left[ \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t + \tau \right] \quad (2.10)$$

onde  $A$  se relaciona com a amplitude da resposta oscilatória e representa o deslocamento máximo da massa a partir da sua posição de equilíbrio. O parâmetro adimensional  $\tau$  representa a *fase* e mede o deslocamento da onda a partir da sua posição inicial, correspondente a  $\tau = 0$ . O período do movimento é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.11)$$

É habitual designar  $\tilde{f}$  por frequência natural amortecida

$$\tilde{f} = \frac{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi} = \frac{\tilde{\omega}}{2\pi} \quad (2.12)$$

e  $\tilde{\omega}$  por velocidade angular natural amortecida. Nestas circunstâncias a solução da equação homogénea associada assume a seguinte forma:

$$x_{GH}(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\tilde{\omega}t + \tau). \quad (2.13)$$

A frequência natural amortecida está presente nos casos em que  $c > 0$ , esta constante de amortecimento tem em conta uma força proporcional à velocidade, mas que atua na sua direção oposta.

A força presente na Equação (2.1) faz com que o sistema amortecido se denomine oscilador harmónico forçado. A excitação externa fornece energia ao sistema que apresentará uma resposta de máxima amplitude à frequência  $\tilde{\omega}$ . A resposta terá uma amplitude infinita na ausência de amortecimento. Este fenómeno, onde a amplitude de oscilação é máxima com o sistema a vibrar à sua frequência natural, designa-se ressonância (Timoshenko et al., 1974).

## 2.2 Mecânica dos fluidos

### 2.2.1 Descrição de um escoamento

#### Dois tipos de abordagem

Os fenómenos verificados na interação fluido-estrutura envolvem conhecimentos e conceitos da Mecânica de Fluidos que serão brevemente explicados. É importante enquadrar escoamentos exteriores quanto ao seu regime e caracterizar certos parâmetros adimensionais relevantes.



Para analisar o comportamento de um fluido podem ser consideradas duas abordagens (White, 2017):

- Na abordagem "Euleriana" escolhe-se um intervalo de tempo ou uma secção de volume e consideram-se todas as partículas que por aí passam. O volume de controlo é fixo no espaço e o escoamento passa livremente por este, pretende-se observar o que se passa dentro desse volume de controlo;
- Na abordagem "Lagrangeana" descreve-se o movimento de cada partícula ao longo do escoamento. Nesta abordagem, o movimento das várias partículas de um fluido é seguido ao longo da respetiva trajetória. O volume de material é composto por parcelas específicas de um fluido que são transportadas com o escoamento, nesta perspetiva determinam-se a posição e propriedades do volume de material.

Estas descrições são matematicamente equivalentes, isto é, pode-se obter qualquer uma delas a partir da outra.

### **Classificação de fluidos**

Os fluidos podem ser classificados em compressíveis ou incompressíveis, viscosos ou não viscosos, líquidos ou gases (White, 2017).

Um fluido diz-se incompressível se, para o mesmo volume de controlo, a massa volúmica de cada partícula de fluido, se mantém constante, mesmo que exista uma alteração de pressão. Pelo contrário, um fluido é compressível se experimenta variações de densidade significativas, à medida que a pressão se altera.

Podem, ainda, classificar-se os fluidos em viscosos ou não viscosos. A viscosidade mede a resistência de um fluido ao escoamento, ou seja, a resistência que oferece a fluir. Assim, um fluido muito viscoso oferece grande resistência à deformação, ao contrário de um pouco viscoso, em que essa resistência é pequena. Esta propriedade relaciona as tensões locais num fluido em movimento com a taxa de deformação do elemento fluido e varia com a temperatura e a pressão:

- A viscosidade aumenta pouco com a pressão;
- Para os gases, a viscosidade aumenta com a temperatura;
- Para os líquidos, a viscosidade diminui com a temperatura.

As características dos fluidos (compressível ou incompressível, viscoso ou não viscoso) influenciam as características dos escoamentos.

## Escoamentos

Os escoamentos podem ser classificados de acordo com a sua natureza em estacionários ou não estacionários. Nos escoamentos estacionários (*steady flow*) as características principais, como velocidade, pressão ou caudal, em qualquer posição, não se alteram com o tempo. Por outro lado, nos escoamentos não estacionários (*unsteady flow*) existe variação temporal destas características.

Os escoamentos estacionários, podem ainda ser divididos em internos ou externos. Um escoamento interno encontra-se confinado por paredes, ao contrário de um escoamento externo que não tem esta limitação espacial. O fenómeno das vibrações induzidas por vórtices (VIV) insere-se no grupo dos escoamentos externos associados a fluidos viscosos.

Os escoamentos podem também ser uniformes ou não uniformes. Nos escoamentos uniformes a velocidade em qualquer instante, não se altera espacialmente (direção do escoamento, por exemplo), ao contrário de um escoamento não uniforme, onde existe esta variação espacial de velocidade.

Os escoamentos podem ainda ser rotacionais e irrotacionais. A vorticidade é o campo vetorial que quantifica a rotação (*curl*) das partículas num fluido em movimento. O seu valor é igual ao dobro da velocidade angular e define a curvatura do vetor velocidade:

$$\text{curl } V = 2\omega \quad (2.14)$$

Os escoamentos com vorticidade zero designam-se irrotacionais e têm velocidade angular negligenciável. Os escoamentos irrotacionais permanecem irrotacionais, a menos que passem numa região em que os efeitos viscosos se fazem sentir. Pelo contrário, nos escoamentos rotacionais as partículas estão sujeitas a velocidade angular. Um fluido que seja viscoso, é também rotacional uma vez que a viscosidade provoca rotação das partículas.

Os escoamentos também se podem dividir em turbulentos ou laminares. Um movimento desorganizado das partículas existentes no volume de controlo, caracterizado por uma grande interação entre as massas de fluido, representa um escoamento turbulento. Nestes escoamentos, verificam-se variações irregulares de velocidade. Além disso, estão associados a números de Reynolds mais elevados, uma vez que as forças de inércia dominam as forças de viscosidade. É nos escoamentos turbulentos que se dá a libertação de vórtices. Num escoamento laminar, pelo contrário, o movimento das partículas é feito ordeiramente e verifica-se a números de Reynolds mais baixos. Neste caso, o efeito da viscosidade sobrepõe-se aos movimentos desordenados das partículas, ou seja, a turbulência é amortecida.

### Princípios de conservação da massa, de energia

Existem diversos princípios que se aplicam aos escoamentos, nomeadamente os de conservação de massa, de movimento e de energia.

- O princípio de conservação de massa define que a taxa de acumulação temporal de massa no interior de um volume de controlo é constante ao longo do tempo. Este cálculo é feito através da diferença entre a massa que entra e a que sai desse volume de controlo, num dado instante.
- O princípio de conservação da quantidade de movimento (ou momento) estabelece que a diferença entre o momento que abandona o volume e o que entra no volume, num dado instante, é igual à soma das forças aplicadas nesse volume.
- Também se aplica o princípio da conservação de energia. Considerando um volume elementar de fluido ao longo de uma linha de corrente, a energia é constante ao longo dessa linha.

### Linhas de corrente

Uma das formas de representar o padrão de um escoamento é através de linhas de corrente. As linhas de corrente (*streamlines*) são o caminho que uma partícula sem massa percorre ao longo de um escoamento. Estas linhas são tangentes ao vetor velocidade em cada ponto e referem-se sempre a um certo instante, veja-se a Figura 2.5. Próximo das fronteiras do sólido sujeito ao escoamento, as linhas de correntes são paralelas entre si e a essas fronteiras. Nos locais do escoamento onde as linhas se encontram mais juntas, a velocidade do fluido é alta e onde se encontram mais afastadas, a velocidade do fluido é mais baixa.

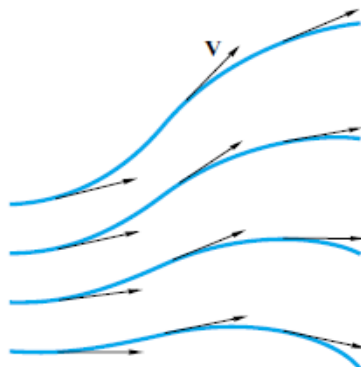


Figura 2.5: Linhas de corrente. \*

\*Retirado de White, 2002.

Associada às linhas de corrente existe a função corrente (*stream function* -  $\psi$ ), uma linha de escoamento que tenha a *stream function* constante, representa uma *streamline* desse escoamento. A função corrente permite visualizar o padrão do escoamento e pode definir-se da seguinte forma: "O volume de escoamento que passa entre 2 pontos é igual à diferença da função corrente nesses 2 pontos." (White, 2017). Tem ainda uma interpretação relevante no que toca à direção de um escoamento, e que se pode ver na Figura 2.6.

- O escoamento movimenta-se da esquerda para a direita se a função corrente aumenta;
- O escoamento move-se da direita para a esquerda se a função corrente diminui.

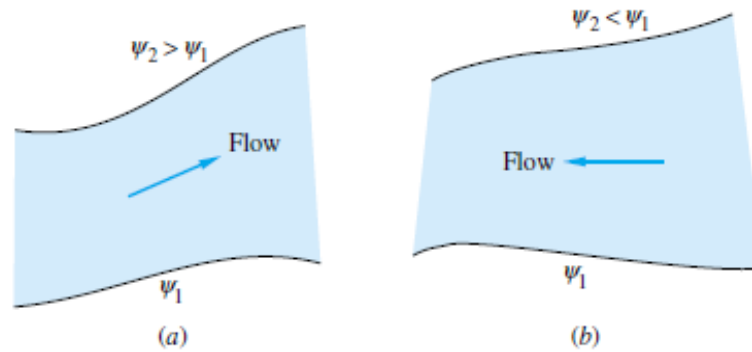


Figura 2.6: Direção do escoamento: a) move-se para a direita se a  $\psi$  aumenta; b) move-se para a esquerda se a  $\psi$  diminui. \*

\*Retirado de White, 2002.

### Camada limite

Como referido anteriormente, um fluido viscoso oferece resistência a fluir e à deformação. Ao passar ao longo de uma parede sólida (ao contrário de um fluido não viscoso) vai interagir com esta. A velocidade do fluido ao atingir a parede vai igualar a velocidade de deslocamento dessa parede. Ao afastar-se da parede, a velocidade do escoamento vai variar significativamente até atingir o valor da velocidade registado na zona do escoamento onde não há interação com a estrutura. A região onde esses gradientes de velocidade ocorrem, denomina-se camada limite (*boundary layer*), onde se verificam perdas de energia devido aos efeitos viscosos.

A Teoria da Camada Limite, proposta por Ludwig Prandtl em 1904, estuda o comportamento de estruturas sujeitas a escoamentos externos. A partir dela, podemos concluir que os escoamentos externos, são em parte viscosos e em parte não viscosos (White, 2017). Verificam-se efeitos viscosos perto da superfície do corpo e na sua esteira mas, praticamente, em toda a região longe do corpo, o escoamento é não viscoso.

Esta teoria prevê a separação do escoamento, fenómeno que ocorre na camada limite. Idealmente, quando um escoamento passa por uma estrutura, surgiria uma fina camada limite à volta do corpo e, na sua parte de trás, uma estreita esteira viscosa (ver alínea a) da Figura 2.7). Na realidade, forma-se a camada limite estreita na frente da estrutura (a pressão diminui, criando-se um gradiente de pressão favorável) mas na parte de trás do corpo, a camada limite experimenta um aumento de pressão (gradiente de pressão adverso) e ocorre separação, dando origem a uma esteira agitada (ver alínea b) da Figura 2.7).

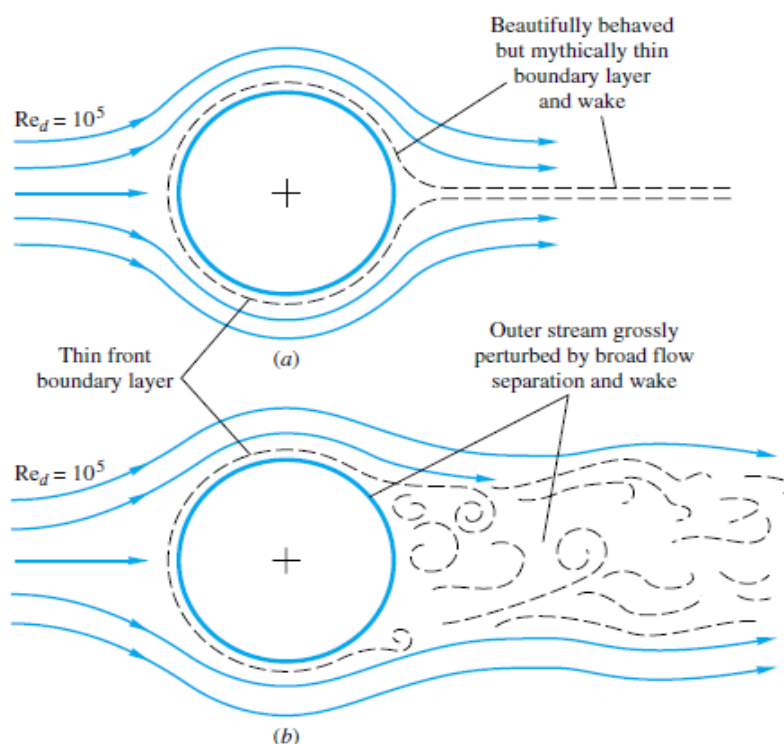


Figura 2.7: Interação entre a região viscosa e não viscosa de um corpo sujeito a um escoamento : a) escoamento ideal; b) escoamento real. \*

\*Retirado de White, 2002.

A espessura da camada limite pode ser entendida como a distância à estrutura, a partir da qual deixa de haver gradiente de velocidade transversal. A velocidade passa de nula (na parede da superfície) a um valor máximo (no topo da camada limite), passando a ser novamente estável. Quando a espessura da camada limite aumenta, o que se verifica à medida que se avança no escoamento, há uma diminuição do movimento junto à parede. Esta espessura relaciona-se com o número de Reynolds, na medida em que é tanto menor quanto maior for o número de Reynolds.

### Parâmetros importantes

Existe um conjunto de parâmetros utilizados para descrever as vibrações de uma estrutura elástica sujeita a um escoamento estável. O objetivo da maioria dos problemas de vibrações induzidas por escoamentos/ vórtices, é prever a amplitude adimensional dessa vibração em função dos restantes parâmetros referidos. Nesta secção alguns desses parâmetros, bem como conceitos importantes para uma análise completa deste tipo de vibração, são definidos.

- Geometria – parâmetro mais importante ao determinar a força que o fluido exerce na estrutura e pode ser especificada através da razão de finura:

$$\frac{l}{D} = \frac{\text{comprimento}}{\text{largura}} \quad (2.15)$$

- Velocidade reduzida (*reduced velocity*) – Devido à vibração do modelo no escoamento, é desenhada uma trajetória, cujo comprimento por cada ciclo é  $\frac{U}{f}$ , onde  $U$  é a velocidade do escoamento livre e  $f$  é a frequência de oscilação. Esse comprimento em relação ao diâmetro da estrutura é a velocidade reduzida. Esta grandeza é o inverso da frequência adimensional. Se a velocidade reduzida for baixa, o modelo interage fortemente com as componentes periódicas da esteira próxima:

$$\frac{U}{fD} \quad (2.16)$$

A largura,  $D$ , da secção exposta ao escoamento é usada uma vez que a largura da esteira tende a seguir o diâmetro da estrutura. Estes valores relacionam-se, como já foi referido, através do número de Strouhal, veja-se a Equação (1.1).

- Amplitude adimensional (*dimensionless amplitude*) – O diâmetro do objeto, em relação à amplitude de vibração ( $A_y$ ) é a amplitude adimensional:

$$\frac{A_y}{D} \quad (2.17)$$

- Massa volúmica ( $\rho$ ) - de um corpo é o quociente entre a massa ( $m$ ) e o volume ( $V$ ) desse corpo. Mede o grau de compactação desse corpo, em  $kg/m^3$ :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.18)$$

- Pressão ( $p$ ) - Força aplicada por unidade de área, em *Pascal* ( $Pa$ ):

$$p = \frac{F}{A} \quad (2.19)$$

- Coeficiente de viscosidade ( $\eta$ ) - relaciona a força necessária para manter o gradiente de velocidade ( $\frac{dv}{dx}$ ) em determinada área. Mede a resistência de um fluido ao escoamento:

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dx} \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Números adimensionais

Existem, ainda, parâmetros adimensionais, que são importantes para uma análise completa do comportamento de uma estrutura quando sujeita a escoamento transversal. Exemplos desses parâmetros são o número de Reynolds e o número de Mach.

- Número de Reynolds – rácio entre as forças inerciais e as viscosas de um escoamento:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} = \frac{\text{forças inerciais}}{\text{forças viscosas}} \quad (2.21)$$

onde,  $\rho$  é a massa volúmica,  $U$  a velocidade do escoamento,  $D$  o diâmetro do cilindro,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Este parâmetro é uma medida da espessura da camada limite e da transição do escoamento laminar para turbulento. A separação do escoamento da parte de trás da estrutura depende do número de Reynolds. Este, por sua vez, depende da geometria do fluido e da rugosidade da superfície.

Números de Reynolds pequenos indicam um escoamento laminar com variações suaves e regulares das partículas, onde as forças viscosas se sobrepõem às inerciais. Números de Reynolds moderados caracterizam a fase de transição de um escoamento laminar para um turbulento, passando de estável a agitado. Números de Reynolds elevados são característicos de escoamentos turbulentos. Pode observar-se então que o aumento deste parâmetro provoca instabilidade no comportamento laminar e o escoamento torna-se progressivamente mais turbulento. No caso dos escoamentos turbulentos as flutuações não são periódicas, são antes aleatórias e situam-se num largo espectro de frequências.

Para números de Reynolds maiores que 1000, a libertação periódica de vórtices ocorre a uma frequência dada pela Equação (1.1):

$$f_s = \frac{S_T U}{D}$$

com  $S_T$  aproximadamente igual a 0.2; A ressonância do modelo com libertação de vórtices dá-se quando  $f = f_s$ . O primeiro pico de vibração deve-se, portanto, à libertação de vórtices. Aumentar consideravelmente o amortecimento, limita este tipo de vibração.

- Número de Mach – Tendência de um fluido de se comprimir ao encontrar uma estrutura, este parâmetro mede a sua incompressibilidade:

$$\frac{U}{c} = \frac{\text{velocidade do fluido}}{\text{velocidade do som no fluido}} \quad (2.22)$$

## 2.3 Vibrações induzidas por vórtices

### 2.3.1 Contexto na interação fluido-estrutura

O escoamento do fluido e o movimento da estrutura interagem entre si influenciando-se reciprocamente, verificando-se o acoplamento entre o escoamento e a oscilação da estrutura.

Como vimos, é na camada limite (na vizinhança imediata da estrutura) que há transição entre o escoamento exterior e a parede do sólido (velocidade nula).



Nos casos em que o número de Reynolds é pequeno, os efeitos viscosos dominam a dinâmica do escoamento junto à superfície. Aqui, as linhas de corrente adaptam-se à forma do corpo e a vorticidade produzida na camada limite, dissipa-se na proximidade do corpo, o escoamento passa a ser novamente uniforme. Nesta situação a camada limite mantém-se ligada ao corpo e os efeitos do fluido encontram-se confinados a uma esteira estreita.

Pelo contrário, para números de Reynolds elevados, os efeitos viscosos apenas são dominantes numa região muito pequena da camada limite, onde se produz grande vorticidade. Pelo facto da vorticidade gerada ser elevada, esta não se dissipa, fazendo com que o escoamento atrás do corpo forme duas camadas de corte (*shear layers*), ver alínea a) da Figura 2.8. Uma camada de corte é de natureza instável devido aos vórtices que nela se formam. Uma vez que se formam duas dessas camadas, estas vão interagir. Esta instabilidade acoplada cria vórtices alternadamente, ver alínea b) da Figura 2.8, num fenómeno conhecido por libertação de vórtices (*vortex shedding*) que afeta toda a esteira. Estes vórtices podem provocar, em condições específicas, oscilações auto-excitadas na estrutura, a uma frequência bem definida ou em múltiplos desta (frequência de libertação de vórtices -  $f_s$ ).

A libertação de vórtices ocorre em escoamentos viscosos, onde devido às tensões viscosas se gera rotação, e dá-se perto das superfícies sólidas, na zona da camada limite.

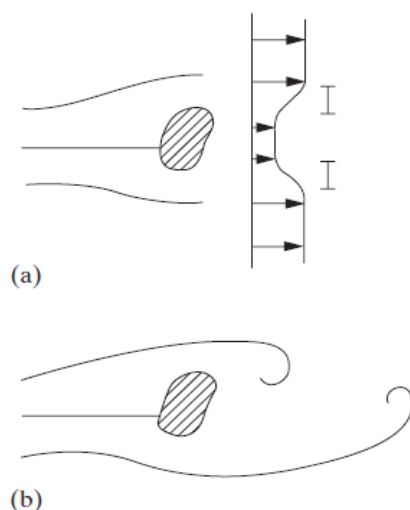


Figura 2.8: a) Duas camadas de corte formadas no perfil de escoamento resultando em b) libertação de vórtices. \*

\*Retirado de Paidoussis, 2011.

### 2.3.2 Acoplamento fluido-estrutura

À medida que uma partícula de fluido se movimenta ao longo de um escoamento até ao bordo de ataque (*trailing edge*) de um cilindro, a pressão na partícula aumenta. Criando-se camadas limite em ambos os lados do cilindro. Estas camadas acabam por se separar da superfície do cilindro e formar duas camadas de escoamento livre que seguem o escoamento principal e limitam a esteira. Uma vez que a zona interna destas camadas se move bastante mais devagar do que a zona externa, por esta se encontrar em contacto com o escoamento livre, ambas as camadas começam a ganhar movimentos rotativos e formam vórtices. Cria-se um padrão de vórtices na esteira que interage com o movimento do cilindro, de onde resultam as vibrações induzidas por vórtices.

Qualquer estrutura com um bordo de ataque suficientemente esbelto, liberta vórtices ao estar em contacto com um fluido subsónico (velocidade do fluido inferior à velocidade do som). As grandes amplitudes oscilatórias que podem ser atingidas, fazem com que as vibrações induzidas por vórtices em estruturas elásticas tenham grande interesse prático uma vez que têm efeitos destrutivos numa grande diversidade de infraestruturas e equipamentos como, pontes, antenas, cabos ou permutadores de calor.

O escoamento e a estrutura são sistemas que interagem entre si. Encontram-se acoplados pela força exercida pelo fluido na estrutura, esta força causa deformação da estrutura. Ao deformar-se, a estrutura muda a sua orientação de acordo com o escoamento, fazendo com que o próprio escoamento possa sofrer alterações (Blevins, 1990)

O acoplamento fluido-estrutura pode ser entendido através do seguinte mecanismo de interação dinâmica (Axisa and (Eds.), 2007):

- O movimento do sólido provoca o movimento do fluido;
- O movimento do fluido provoca tensões flutuantes (incluindo pressão flutuante) no sólido através das forças que atuam na parede deste;
- O movimento do sólido é, deste modo, modificado.

Pode observar-se que o fluido resiste ao movimento no entanto, não o impede. A sua energia cinética, provocada pelo movimento do sólido, faz com que as forças de resistência, devido à frequência e amplitude de oscilação. Assim, o movimento real do fluido é muito mais complexo que o do sólido pois este depende, não só da geometria do sólido, mas também da direção/ângulo de inclinação do movimento do sólido.

Pode concluir-se que o fluido entra em movimento unicamente devido à vibração do sólido.

### 2.3.3 Números adimensionais

- Razão de massa (*mass ratio*) – é o rácio entre a massa da estrutura e o deslocamento do fluido que esta provoca. É uma medida dos efeitos de flutuabilidade e de inércia do modelo relativamente ao fluido. Mede a suscetibilidade de uma estrutura leve às vibrações induzidas por escoamentos. Quanto maior for a razão entre a densidade do fluido e a densidade da estrutura, mais propício é o fenómeno de vibração induzida pelo escoamento:

$$mass\ ratio = \frac{m}{\rho D^2} \quad (2.23)$$

onde  $\rho$  é a massa volúmica do fluido e  $D$  é o diâmetro do cilindro.

- Coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) - representa a resistência aerodinâmica:

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho U^2 A} \quad (2.24)$$

onde  $A$  é a área de referência ( $D \times l$ ).

- Número de Scruton - número adimensional utilizado para caracterizar as vibrações induzidas por escoamentos (Belloli et al., 2015).

$$Sc = \frac{2\pi m_L \xi}{\rho D^2} \quad (2.25)$$

onde  $m_L$  é a massa por unidade de comprimento da estrutura e  $\xi$  é o amortecimento estrutural adimensional.

- Número de Strouhal - número adimensional que relaciona a frequência de libertação de vórtices ( $f_s$ ) com a velocidade do escoamento livre ( $U$ ), dividida pela largura do cilindro ( $D$ ), já referido na Equação (1.1).

$$S_T = \frac{f_s D}{U} \quad (2.26)$$

Em escoamentos com movimento periódico, o número de Strouhal está associado às oscilações do escoamento provocadas pelas forças inerciais relativamente às mudanças de velocidade que se devem à aceleração do escoamento. Para números de Strouhal elevados, as oscilações dominam o escoamento, enquanto que a números de Strouhal baixos, as oscilações são enfraquecidas pelo movimento rápido do escoamento. A valores intermédios, ocorre a libertação de vórtices.

Consoante os valores do número de Reynolds, vários pares de vórtices são formados na parte de trás do cilindro num arranjo desalinhado. A frequência de libertação de vórtices depende linearmente da velocidade do escoamento e o espaçamento entre os vórtices depende do número de Strouhal. O número de Strouhal, por sua vez, é função do número de Reynolds e da geometria do objeto (Katopodes, 2019).

### 2.3.4 Separação

Como referido anteriormente, devido à interação fluido-estrutura, surge uma região no escoamento em que os gradientes de velocidade são significativos e onde se dão perdas de energia, devido aos efeitos viscosos. Essa região é a camada limite, e é onde se dá o fenómeno de separação. O fenómeno da libertação de vórtices só se verifica se, anteriormente, ocorrer a separação, tal como se verifica na Figura 2.9.

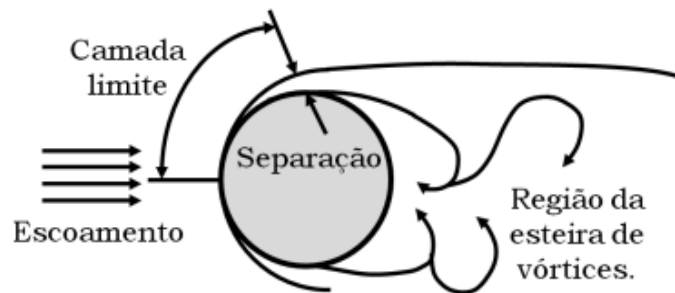


Figura 2.9: Separação da camada limite. \*

\*Retirado de Sandri, 2010.

Os perfis de escoamento ocorrem em sequência, à medida que a camada limite progride ao longo da superfície do corpo.

O fenómeno de separação relaciona-se com o número de Reynolds, da seguinte forma:

- Para pequenos números de Reynolds, o escoamento não se separa. À medida que este parâmetro aumenta, um par de vórtices forma-se imediatamente atrás da estrutura. Se o número de Reynolds aumentar ainda mais, os vórtices prolongam-se pelo escoamento até que um deles se separe e crie uma esteira periódica e uma estrada de vórtices;
- Para números de Reynolds até, aproximadamente 150, a estrada de vórtices é laminar;

- Para números de Reynolds de 150 a 300, a estrada de vórtices é turbulenta e torna-se num escoamento completamente turbulento. Dos 300 aos  $3 \times 10^5$ , atinge-se a região subcrítica, onde a libertação de vórtices ocorre a uma frequência bem definida. Na zona de transição, a frequência de libertação de vórtices não é constante (dá-se num espectro de frequências de vibração em vez de numa frequência bem definida) e a força de arrasto diminui bastante.
- Para números de Reynolds ainda maiores, na chamada região supercrítica, a estrada de vórtices volta a restabelecer-se.

A estrada de vórtices evolui constantemente à medida que se afasta da parede do cilindro.

### 2.3.5 Movimento da estrutura

Como referido anteriormente, as vibrações induzidas por vórtices inserem-se no contexto de uma interação entre o fluido e a estrutura. Neste sentido, não só o escoamento tem influência no movimento do cilindro, como o comportamento vibratório do cilindro influencia o escoamento. A vibração do cilindro a uma frequência próxima ou igual à da libertação de vórtices, e perpendicular ao escoamento livre pode:

- Aumentar a intensidade dos vórtices;
- Aumentar a correlação entre o comportamento da esteira e o escoamento (devido à diminuição dos efeitos tridimensionais com o aumento da envergadura);
- Provocar o efeito de *lock-in* (sincronização da frequência da libertação de vórtices com a frequência de vibração do cilindro);
- Aumentar a intensidade da força de arrasto.

À medida que a amplitude de vibração do cilindro aumenta, o padrão simétrico de libertação de vórtices deixa de existir. Esta quebra na simetria implica que as forças induzidas por vórtices no cilindro, sejam auto-limitadas pela amplitude de vibração do cilindro. Esta quebra no padrão de simetria pode ser observada nas Figuras 2.10 e 2.11. Onde numa fase inicial se observa um padrão estável de libertação de vórtices, com a formação de 2 vórtices por ciclo 2.10, e à medida que a amplitude de vibração do cilindro aumenta, observa-se um padrão instável, com a formação de 3 vórtices por ciclo 2.11.

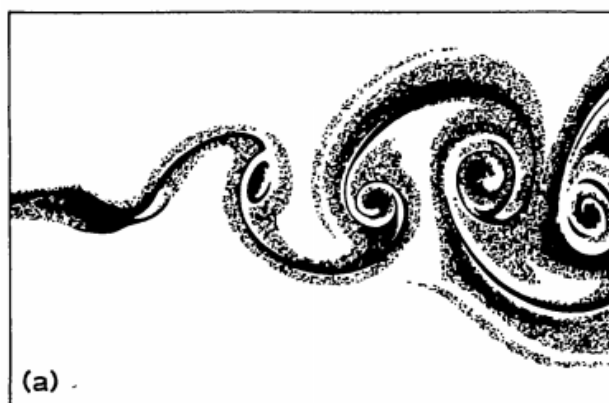


Figura 2.10: Estrada de vórtices estável com 2 vórtices formados por ciclo de vibração. \*

\*Retirado de Blevins, 1990.

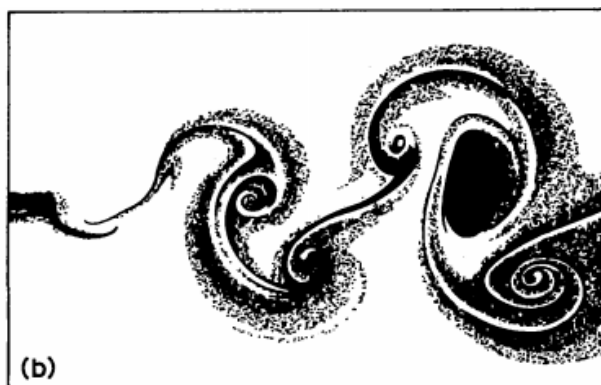


Figura 2.11: Estrada de vórtices instável com 3 vórtices formados por ciclo de vibração. \*

\*Retirado de Blevins, 1990.

O fenómeno de *lock-in*, que se verifica quando se dá a sincronização das frequências natural da estrutura com a de libertação de vórtices, transfere energia para a estrutura, fazendo com que grandes amplitudes vibratórias sejam produzidas.

Uma análise generalizada que integre tanto o campo do escoamento, como o movimento do cilindro ainda não existe para a maioria dos casos práticos. Existem apenas modelos desenvolvidos para descrever a interação fluido-estrutura que incorporam vários efeitos dinâmicos experimentalmente observados. Um destes modelos é o de esteira oscilante, objeto deste estudo, e

que interpreta a esteira próxima como um oscilador não linear, auto-excitado e acoplado à estrutura.

## 2.4 Equações diferenciais não lineares

Existem diversas formas de classificar as equações diferenciais, sendo que uma das mais importantes tem a ver com a sua linearidade.

Uma equação diferencial da forma (William E. Boyce, 2001):

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.27)$$

diz-se linear se  $F$  é uma função linear das variáveis  $t, y, y', \dots, y^{(n)}$ . Caso contrário, diz-se não linear.

Por exemplo, a equação:

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \quad (2.28)$$

é não linear por causa do termo  $yy'$  e a equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (2.29)$$

que, representa a oscilação de um pêndulo, é não linear devido ao  $\sin$  da função incógnita presente no 2º termo.

A teoria e os métodos matemáticos para resolver equações lineares estão altamente desenvolvidos. Pelo contrário, a teoria associada às equações não lineares é mais complexa e os métodos são menos satisfatórios. Daí que muitos problemas não lineares sejam aproximados por equações lineares, este processo chama-se linearização. No entanto, esta abordagem nem sempre é válida, uma vez que existem fenómenos que, devido à sua complexidade, não podem ser representados adequadamente por equações lineares.

Nas equações lineares verifica-se o teorema da existência e da unicidade de solução dos problemas de valores iniciais, ou seja, dado um problema de valores iniciais, este tem solução e essa solução é única, em:

$$y' + p(t)y = g(t) \text{ com } y(t_0) = y_0 \quad (2.30)$$

Veja-se (William E. Boyce, 2001). No caso das equações não lineares esse teorema tem de ser reformulado: a função  $f$  em:

$$y' = f(t, y) \text{ com } y(t_0) = y_0$$

tem de ser contínua para que se assegure a existência de solução da equação, no entanto, a sua unicidade nem sempre consegue ser assegurada.

Além disso, a solução da equação linear existe ao longo de qualquer intervalo que contenha  $t = t_0$ , desde que  $p$  e  $g$  sejam contínuas. Ao contrário das equações não lineares, onde o intervalo que contém a solução pode ser difícil de encontrar.

Outro aspeto relevante prende-se com a dependência das condições iniciais. Nas equações não lineares as singularidades da solução dependem fortemente das condições iniciais e da própria equação diferencial, o que não se verifica nas equações lineares, onde mesmo que se alterem as condições iniciais, a solução continua a ser facilmente encontrada.

É ainda importante referir que ao contrário das equações lineares, as não lineares não possuem, em geral, uma fórmula resolvente.

### 2.4.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é um sistema cujo estado se modifica com o tempo. A sua evolução governa-se por regras que especificam o estado do sistema para valores discretos ou contínuos de  $t$ . Se a evolução do sistema se basear em valores de tempo discretos, descreve-se através de sistemas de equações algébricas. Caso contrário, se os valores de tempo forem contínuos, a evolução é descrita através de um sistema de equações diferenciais.

A solução de um sistema dinâmico pode ser constante ou variável no tempo. Uma solução constante designa-se por ponto fixo, ponto de equilíbrio ou solução estacionária, enquanto que uma solução dinâmica também se pode denominar por solução variável no tempo.

No contexto das equações diferenciais, um ponto crítico é considerado o mesmo que um ponto fixo. Considerando a sua definição, um ponto crítico de um sistema do tipo:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.31)$$

é todo o ponto  $x^*$  em que todas as derivadas são nulas.

$$f(x^*) = 0. \quad (2.32)$$

Podem ainda dividir-se os sistemas dinâmicos em autónomos e não autónomos. Os sistemas autónomos são do tipo:

$$\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y), \quad (2.33)$$

em que  $F$  e  $G$  são funções que não dependem da variável independente,  $t$ , apenas dependem das variáveis  $x$  e  $y$ . Por outro lado, se  $F$  e  $G$  dependerem explicitamente de  $t$ , então o sistema é não autónomo.



### Soluções variáveis no tempo - ciclos limite

A dinâmica dos sistemas pode ser analisada através de referenciais onde a cada grau de liberdade corresponde a posição de uma partícula do sistema e a sua velocidade ou momento. Assim, existe um espaço multidimensional, onde cada ponto será representado pela posição e velocidade. Este espaço designa-se por espaço de fase. O conjunto de estados do sistema traçados ao longo do tempo definem uma linha, designada por órbita, cujos pontos traduzem a evolução do sistema ao longo do tempo.

Como referido anteriormente, a solução de um sistema dinâmico pode ser uma solução de equilíbrio (ponto fixo) ou uma solução variável no tempo. Um ponto fixo é, como vimos, um ponto da função em que a primeira derivada é zero, correspondendo a situações de equilíbrio e soluções de um sistema de equações diferenciais onde a velocidade de resposta é zero.

As soluções periódicas de um sistema dinâmico (especialmente dos sistemas contínuos no tempo) ao contrário das soluções de equilíbrio, têm estados variáveis no tempo. As soluções periódicas  $X = X(t)$  são caracterizadas pela existência dum período fundamental  $T$ , tal que

$$X(t + T) = X(t) \text{ e } X(t + \tau) \neq X(t) \quad (2.34)$$

para  $0 < \tau < T$ .

Um caso específico de uma solução periódica (associada, neste caso, a um sistema autónomo) é um ciclo limite (Ali H. Nayfeh, 1995).

Uma solução periódica é um ciclo limite se não existem outras soluções periódicas suficientemente próximas dessa, tal que essa solução periódica é isolada e corresponde a uma órbita fechada no espaço de fase. Qualquer trajetória iniciada perto de um ciclo limite tem a particularidade de se aproximar deste tanto para  $t \rightarrow \infty$  como para  $t \rightarrow -\infty$ . Assim, um ciclo limite está associado a uma superfície no espaço de fase para o qual as trajetórias tendem a convergir.

Os ciclos limite podem ser de vários tipos, veja-se (William E. Boyce, 2001) e a Figura 2.12, ilustra cada um deles:

- Estáveis (representam atratores) - Se todas as trajetórias que começam nas proximidades do ciclo limite formam uma espiral na direção desse ciclo (aproxima-se deste) à medida que  $t \rightarrow \infty$ ;
- Semiestável - Se as trajetórias de um dos lados do ciclo limite formam uma espiral na direção desse ciclo e no outro lado, formam uma espiral na direção oposta (afastam-se deste);

- Instável (representam repulsores) - Se as trajetórias de ambos os lados do ciclo formam uma espiral que se afasta desse ciclo à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

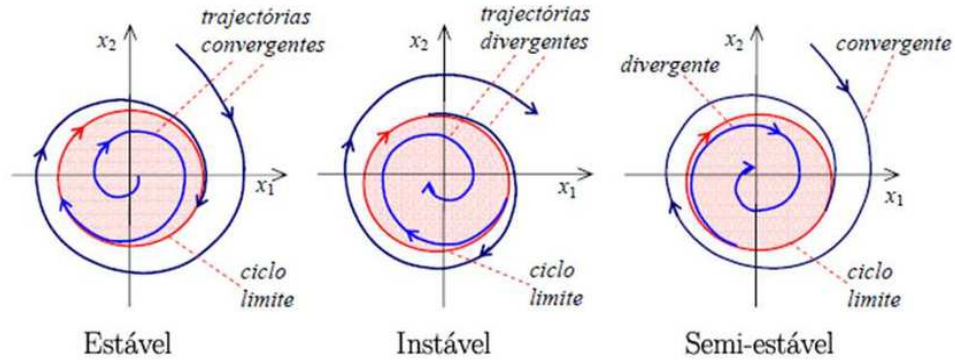


Figura 2.12: Tipos de ciclos limite.\*

\*Retirado de Rosa, 2015.

Os ciclos limites apenas ocorrem em sistemas não lineares e são importantes em muitas aplicações científicas. Um exemplo são as vibrações auto-excitadas, que como já foi referido, são excitadas pelo seu próprio deslocamento. Os ciclos limite servem também para modelar sistemas com oscilações autónomas, como é o caso do oscilador de Van der Pol.

## Caos

Por vezes no mundo real, existem sistemas que apresentam comportamentos imprevisíveis, atualmente este tipo de comportamento designa-se por caos.

Uma solução caótica não pode ser representada por funções matemáticas elementares. Além disso, o caos não se verifica nem em sistemas lineares nem quando, ao se reescrever as equações do movimento através de equações autónomas de primeira ordem, se utilizam menos de três dessas equações (Thomsen, 2003).

O caos, tipicamente, observa-se quando certos parâmetros do sistema se encontram dentro de determinados intervalos, fora deles, o comportamento muitas vezes é regular. As transições verificadas entre o estado regular e o caótico ocorrem através de bifurcações.

As bifurcações só ocorrem em sistemas estruturalmente instáveis, ou seja, em sistemas que não mantêm as suas propriedades qualitativas ao verem os seus parâmetros de controlo ligeiramente perturbados. Os diagramas de bifurcação descrevem a variação de comportamento de um sistema dinâmico à medida que um certo parâmetro é alterado.

Pode concluir-se que o termo caótico descreve um determinado comportamento não periódico de um sistema dinâmico. Um sistema é caótico num certo intervalo se mostra grande dependência das condições iniciais, ocorrem órbitas periódicas instáveis muito frequentemente e as iteradas dos intervalos se tornam desordenadas.

Testes feitos computacionalmente mostram a existência de condições numéricas características de comportamento caótico, na equação de Van der Pol. Os resultados mostram a tendência desta equação para um comportamento caótico, quando se considera a sua forma não autónoma, ou seja, quando o sistema é excitado por uma força externa periódica do tipo (Tsatsos, 2006):

$$A \sin(\omega t) \quad (2.35)$$

### 2.4.2 Sistemas auto-excitados

Os sistemas auto-excitados são um tipo de sistemas dinâmicos e caracterizam-se por começarem a vibrar por si próprios espontaneamente e a sua amplitude aumenta até que algum efeito não linear a limite. A energia fornecida a estas vibrações é obtida a partir de uma fonte uniforme de energia associada ao sistema, a qual, devido a mecanismos inerentes ao sistema, faz suscitar forças oscilatórias. Nas vibrações auto-excitadas, a força que mantém o movimento é criada ou controlada pelo próprio movimento, quando o movimento é interrompido, esta força desaparece. Este conceito é diferente do de vibração forçada, onde a força que sustenta o movimento é independente deste e mantém-se quando o movimento vibratório se interrompe.

A ocorrência de vibrações auto-excitadas está associada à estabilidade nos pontos de equilíbrio do sistema. Se o sistema é perturbado da sua posição de equilíbrio, normalmente aparecem forças que, fazem o sistema voltar a aproximar-se desse ponto de equilíbrio (ponto de equilíbrio estável) ou afastar-se (ponto de equilíbrio instável). Estas forças dependem ou do deslocamento, ou da velocidade, ou de ambos. Se as forças dependentes do deslocamento aparecerem e provocarem um afastamento do sistema do ponto de equilíbrio, o sistema diz-se estaticamente instável. As forças dependentes da velocidade causam um recuo do sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio, criando-se uma instabilidade dinâmica (Allan Piersol, 2009).

As vibrações auto-excitadas são caracterizadas pela presença de um mecanismo a partir do qual o sistema irá vibrar a uma frequência próxima da sua frequência natural, independente da frequência de quaisquer estímulos exteriores. O movimento é descrito através da solução homogénea instável das equações do movimento. No caso das vibrações forçadas, a frequência

de oscilação é dependente da frequência da função de excitação externa ao sistema. Um exemplo de sistema auto-excitado é o oscilador de Van der Pol em que o amortecimento não linear é o fator que limita a sua amplitude de oscilação.

Quando um sistema é perturbado da sua posição de equilíbrio, apenas devido à sua própria natureza ou ao seu deslocamento, as vibrações livres que surgem destas condições podem reforçar a excitação. Este fenómeno pode amplificar a oscilação e conduzir ao colapso do sistema.

As vibrações auto-excitadas inserem-se nas áreas do design e operação de sistemas físicos, onde o movimento ou parâmetros dependentes do tempo estão envolvidos. Sistemas aeromecânicos, aerodinâmicos, mecânicos ou hidráulicos, são alguns exemplos.

### 2.4.3 Estabilidade

A estabilidade de um sistema de equações relaciona-se com a sensibilidade de resposta desse sistema quando se verifica uma alteração em certos parâmetros.

De uma forma geral, um ponto de equilíbrio  $p^*$  de um sistema autónomo de equações diferenciais, é estável se as trajetórias que começam perto de  $p^*$ , permanecem perto de  $p^*$ , à medida que o tempo passa. O termo estabilidade surge em muitos contextos e com significados diferentes, é importante clarificar os vários conceitos.

Para sistemas contínuos de equações diferenciais:

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad (2.36)$$

onde  $x(t)$  é o vetor das variáveis do estado do sistema e  $\mu(t)$  o vetor dos parâmetros de controlo.

O conceito de estabilidade de um sistema pode ter várias interpretações mas relaciona-se sempre com a sensibilidade de resposta do sistema quando se verifica uma alteração em certos parâmetros (Thomsen, 2003).

### 2.4.4 Equações diferenciais não lineares: algumas abordagens

Como referido anteriormente, as equações diferenciais governam os sistemas dinâmicos e a sua resolução permite prever o comportamento desses sistemas.

As técnicas analíticas de resolução de equações diferenciais têm como objetivo encontrar uma expressão exata da solução no entanto, em muitos problemas da engenharia estes métodos não se aplicam ou são muito difíceis

de usar. Quando isto acontece, recorre-se a outros métodos para obter uma aproximação satisfatória para a solução do problema. Alguns exemplos são os métodos numéricos, os perturbativos, os assintóticos ou os homotópicos.

### Métodos numéricos

Os métodos numéricos permitem obter uma boa aproximação da solução de um problema de valores iniciais. Um dos métodos utilizados neste trabalho é o método de Runge-Kutta, que constitui uma classe de métodos, onde se inserem, por exemplo, o método de Euler ou a fórmula de Heun. O método Runge-Kutta 4<sup>a</sup>/5<sup>a</sup> ordem, tem um erro de truncatura local proporcional a  $h^5$ , fazendo com que seja mais preciso que o método de Euler ou o de Heun. Outra das vantagens deste método é a sua adaptabilidade, é possível escolher o tamanho do passo (*step size*) mais apropriado (William E. Boyce, 2001).

Este método consiste em determinar uma iterada com base nas anteriores, de acordo com um certo passo  $h$ . Para isso, faz-se uma média ponderada de valores de  $y'(t, y)$  em diferentes pontos do intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . O método Runge-Kutta de ordem 4 (RK-4), utilizado nesta dissertação, pode ser escrito como:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.37)$$

$$K_1 = f(t_k, y_k), \quad K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right),$$

$$K_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(t_{k+1}, y_k + hK_3)$$

em que  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $h = \Delta t$  e  $M$  corresponde à ordem do método. O RK-4 requer o cálculo de 4 valores possíveis para  $y'(t, y)$  no intervalo  $[t, t + 1]$ . Faz-se depois uma média ponderada desses valores, atribuindo-se mais peso aos valores intermédios ( $K_2$  e  $K_3$ ).

### Métodos perturbativos

Uma equação diferencial que explique um fenómeno físico, seja este linear ou não, envolve certos parâmetros. Ao alterar estes parâmetros ligeiramente (ou seja, ao perturbá-los) a solução do problema pode variar ligeiramente ou sofrer uma grande mudança. Uma das técnicas mais utilizadas consiste em expressar a função desconhecida numa expansão de série de potências em termos do parâmetro de perturbação e obter os sucessivos termos da

expansão. As técnicas que se baseiam nesta formulação designam-se por técnicas perturbativas (Radhika and Rani, 2015).

A ideia dos métodos perturbativos é começar com uma forma simplificada do problema original e ir acrescentando, gradualmente, correções ou perturbações, de forma a que a solução coincida com a solução do problema original. Assume-se que a solução de um problema de perturbação é uma série infinita em termos do parâmetro de perturbação, esta série denomina-se série de perturbação e assume a forma:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots, \quad (2.38)$$

com  $\varepsilon$  sendo o parâmetro de perturbação.

Assim,  $y_0(x)$  é a solução da forma simplificada do problema original e os restantes termos descrevem o desvio da solução causado pelo desvio em relação ao problema original. Os termos  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$ ... representam termos de ordem superior e são encontrados iterativamente.

### Métodos assintóticos

Os métodos assintóticos fornecem a solução para o problema em termos de uma série infinita, que não precisa de ser convergente. A principal característica destas soluções é que, apesar da sua natureza divergente, haverá uma soma parcial particular que corresponde à melhor aproximação da função solução da equação diferencial em questão (Radhika and Rani, 2015). As técnicas assintóticas podem ser implementadas em problemas fortemente não lineares. É uma vantagem em relação aos métodos perturbativos, que apenas podem ser implementados em problemas pouco não lineares. Além disso, as soluções analíticas aproximadas calculadas são válidas para todo o domínio de solução (Bayat et al., 2012).

### Métodos homotópicos

Os métodos homotópicos fornecem soluções analíticas aproximadas em termos de séries de funções da variável independente. As funções na solução constituem um conjunto de funções base (estas são funções linearmente independentes). Um dos métodos homotópicos mais recentes e que tem vindo a ganhar relevância é o HAM (*Homotopy Analysis Method*), desenvolvido por Liao, em 1992.

O método HAM veio ultrapassar algumas das limitações verificadas nos métodos assintóticos ou perturbativos e é uma técnica semi-analítica utilizada na resolução de equações diferenciais ordinárias e de derivadas parciais que se baseia no conceito de homotopia para gerar uma solução convergente para

problemas não lineares. O HAM permite escolher funções base diferentes de polinómios, cuja escolha se baseia no problema dado. Fornece um controlo na zona de convergência e a taxa de convergência da solução, através de um parâmetro de controlo da convergência e de uma função auxiliar que são introduzidos no problema original (Radhika and Rani, 2015).

### 2.4.5 A equação de Van der Pol

A equação de Van der Pol (não forçada) é a equação diferencial não linear

$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0, \quad (2.39)$$

onde  $x$  é a coordenada da posição (que é uma função do tempo  $t$ ) e o parâmetro  $\varepsilon$  regula a intensidade do amortecimento não linear. Esta equação foi introduzida e estudada em 1920 pelo físico Holandês Balthazar Van der Pol no contexto da modelação do comportamento oscilatório da corrente elétrica numa válvula eletrónica de tipo tríodo (Almeida et al., 2018).

O sistema dinâmico modelado pela equação de Van der Pol constitui um sistema auto-excitado que evolui para uma resposta oscilatória estável. Estes sistemas apresentam tipicamente, de forma espontânea, oscilações de amplitude crescente (associadas a um amortecimento negativo) que evoluem para um ciclo limite.

Pelo facto de numerosos e importantes fenómenos eletrónicos, mecânicos, geológicos e biológicos, entre outros apresentarem comportamentos dinâmicos com respostas oscilatórias típicas de sistemas auto-excitados o estudo deste tipo de modelos é particularmente importante. A equação de Van der Pol é um dos componentes dos modelos de esteira oscilante que descrevem o complexo processo oscilatório observado em estruturas expostas a escoamentos transversos de fluidos (Blevins, 1990).

### Ciclo limite estável da equação de Van der Pol

O oscilador de Van der Pol é descrito pela Equação (2.39). Este oscilador é autónomo, não conservativo e tem amortecimento não linear.

A única situação em que o oscilador é conservativo é quando  $\varepsilon = 0$ . Nesse caso, a equação passa a ser:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (2.40)$$

Para  $\varepsilon$  pequenos, as oscilações autónomas do oscilador são próximas das oscilações harmónicas simples, com uma frequência de 1, um período de  $2\pi$

e amplitude específica. À medida que  $\varepsilon$  aumenta, as oscilações desviam-se mais da frequência natural (Rozov, 2011).

Quando  $\varepsilon > 0$ , o segundo termo da Equação (2.39) que representa a resistência, é proporcional a  $\dot{x}$  e tem coeficiente:

$$\varepsilon (x^2 - 1). \quad (2.41)$$

Para valores elevados de  $x$ , este termo é positivo e atua como redutor da amplitude de resposta. No entanto, para  $x$  pequenos, o termo de resistência é negativo e provoca o crescimento da resposta.

Para qualquer  $\varepsilon > 0$  a Equação de Van der Pol não forçada (2.39) tem um único ciclo limite (estável) para o qual a solução oscilatória evolui independentemente das condições iniciais (desde que diferentes da origem das coordenadas (Hafeez et al., 2015)). Este ciclo limite é caracterizado por uma resposta de amplitude  $A$  e frequência natural  $\omega$ . A solução oscilatória apresenta uma amplitude com valores próximos de 2 no ciclo limite dependendo do valor exato dessa amplitude do valor de  $\varepsilon$  (Lopez et al., 2009).

Também é possível descrever o oscilador através de um sistema de equações de 1ª ordem, em alternativa à equação de 2ª ordem. Esta é forma mais utilizada em análise de sistemas dinâmicos:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \varepsilon(1 - x^2)y \end{cases} \quad (2.42)$$

onde o único ponto crítico é a origem. A origem é um ponto que forma uma espiral instável para  $0 < \varepsilon < 2$  e um nó instável para  $\varepsilon \geq 2$ . Em qualquer caso, uma solução que comece perto da origem, cresce à medida que  $t$  aumenta.

Observações experimentais indicam que a equação de Van der Pol tem uma solução periódica estável de período e amplitude dependentes do valor de  $\varepsilon$ . Analisando os gráficos das trajetórias no plano de fase e de posição-tempo é possível perceber o comportamento periódico deste sistema.

Para um amortecimento de  $\varepsilon = 0.2$ , observem-se as Figuras 2.13 e 2.14 elaboradas em MATLAB, que coincidem com as conclusões verificadas na literatura, nomeadamente em (William E. Boyce, 2001):

O Gráfico 2.13 mostra duas trajetórias, uma que se inicia nas proximidades da origem, com traçado azul e outra que começa no ponto  $(-3, 2)$ , com traçado vermelho, esta escolha tem como objetivo, evidenciar uma trajetória que começa dentro do ciclo limite e outra que começa fora deste. A trajetória que começa na origem forma uma espiral para fora no sentido dos ponteiros do relógio, o que é consistente com o comportamento aproximadamente linear perto da origem. A trajetória que começa perto do ponto  $(-3, 2)$ , forma



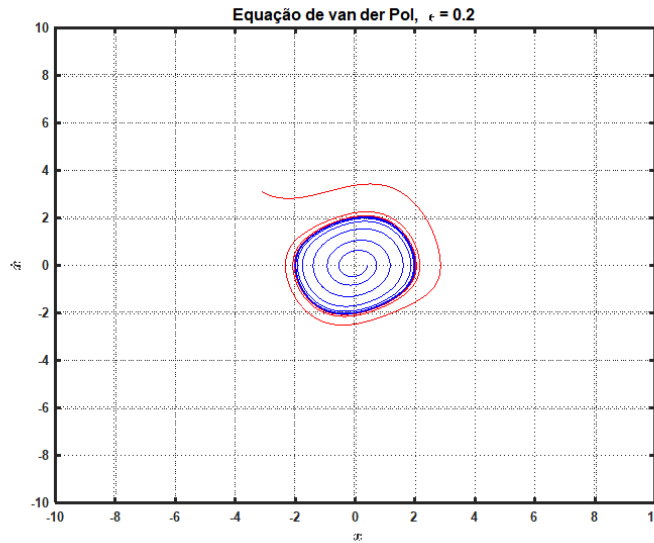


Figura 2.13: Trajetórias da equação de Van der Pol para  $\varepsilon = 0.2$ .

uma espiral para dentro, também no sentido dos ponteiros do relógio. Ambas as trajetórias se aproximam de uma curva fechada que corresponde à solução periódica estável. No Gráfico  $x$  versus  $t$  (posição-tempo) 2.14 pode observar-se que a solução que é inicialmente mais pequena (a azul), aumenta a sua amplitude gradualmente, enquanto que a solução de maior amplitude inicial (a vermelho), vai decrescendo. Pode, então, concluir-se que ambas as soluções se aproximam de um comportamento periódico estável, que corresponde ao ciclo limite. A forma deste gráfico é praticamente sinusoidal que se manifesta pelo ciclo limite quase circular para  $\varepsilon = 0.2$ .

Ao aumentar o coeficiente de amortecimento, para por exemplo  $\varepsilon = 5$ , as trajetórias continuam a mover-se no sentido dos ponteiros do relógio, mas o ciclo limite é bastante diferente de um círculo, assumindo uma forma mais alongada, veja-se a Figura 2.15. O Gráfico de  $x$  versus  $t$  2.16 mostra que a forma da onda do ciclo limite é muito diferente de uma função sinusoidal, evidenciando a não-linearidade do sistema.

Os Gráficos 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16 mostram que o oscilador de Van der Pol tem comportamentos oscilatórios diferentes dependendo do valor de  $\varepsilon$ . As representações de  $x$  versus  $t$ , mostram que a amplitude de oscilação varia pouco com  $\varepsilon$  mas que o período aumenta com este valor. Ao mesmo tempo, a forma da onda varia de quase sinusoidal para formas bem mais irregulares. A presença de um movimento periódico singular que atrai praticamente todas as soluções, ou seja, um **ciclo limite estável**, é um dos fenómenos carac-

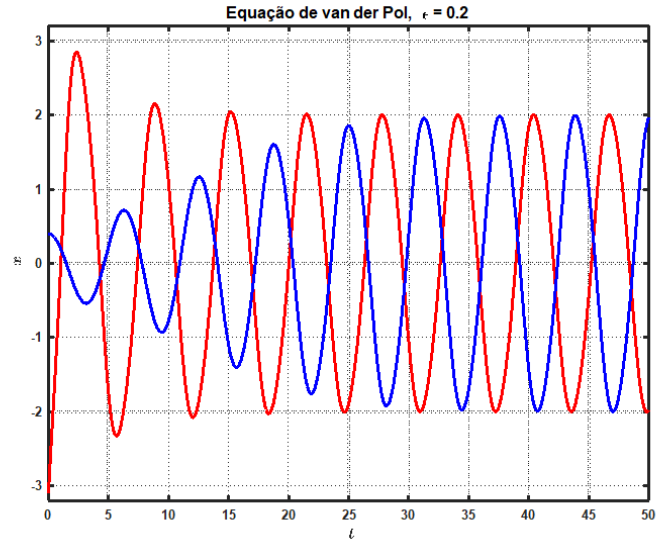


Figura 2.14: Gráfico de  $x$  vs  $t$  para a trajetória de  $\varepsilon = 0.2$ .

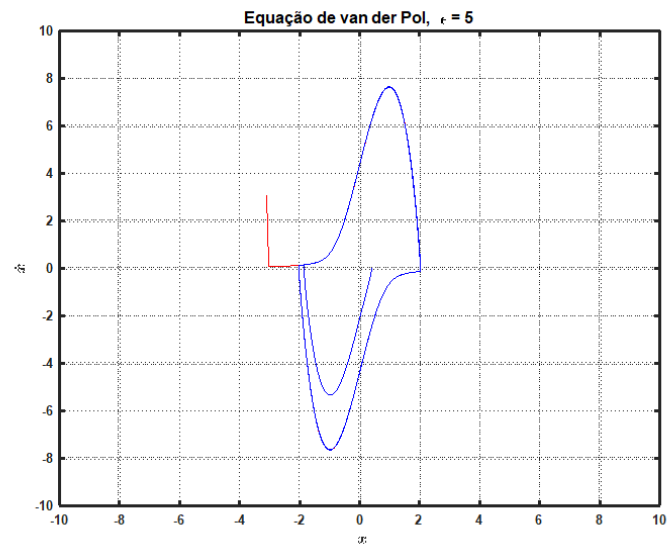


Figura 2.15: Trajetórias da equação de Van der Pol para  $\varepsilon = 5$ .

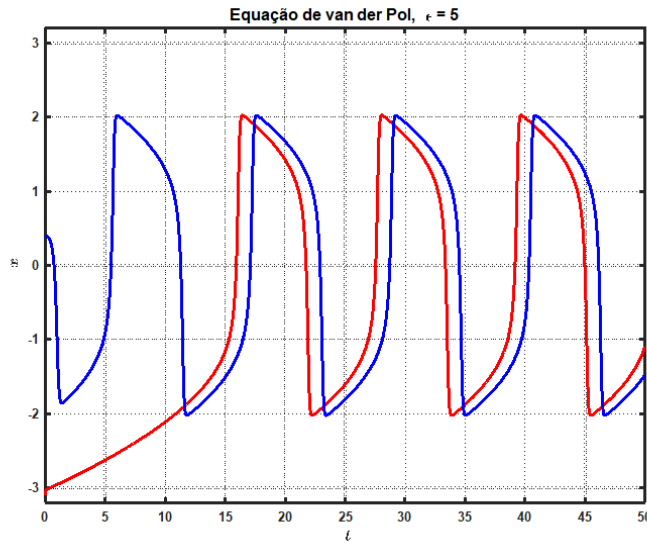


Figura 2.16: Gráfico de  $x$  vs  $t$  para a trajetória de  $\varepsilon = 5$ .

terísticos associado a equações diferenciais não lineares (William E. Boyce, 2001).

### Oscilador de Van der Pol forçado

O oscilador de Van der Pol também pode ser forçado, adicionando-se uma função que excite o sistema e que, tal como vimos, é da forma sinusoidal:

$$A \sin(\omega t) \quad (2.43)$$

A equação diferencial assume a forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = A \sin(\omega t) \quad (2.44)$$

onde  $A$  é a amplitude (ou deslocamento) da onda e  $\omega$  é a velocidade angular.

Neste caso, o sistema passa a ser não autónomo e assume, tal como referido acima, um comportamento caótico. Os testes feitos computacionalmente a cada das condições características do caos, que se encontram na equação de Van der Pol, mostram a sua tendência para um comportamento caótico, nomeadamente quando o valor da frequência angular  $\omega$  é alterado. Este comportamento apenas se verifica quando o sistema é excitado força externa periódica do tipo (2.43).

Em (Tsatsos, 2006) é possível concluir que se  $\omega^2 - 1$  for da mesma ordem de  $A$ , a frequência livre ou natural do sistema se sincroniza com a frequência de excitação. Este fenómeno designa-se por *lock-in*. Se o oscilador for excitado por uma frequência ligeiramente diferente da do ciclo limite não forçado, o comportamento do sistema vai depender do valor de  $A$ . Se  $A$  for pequeno, verifica-se o aparecimento do ciclo limite com um período ligeiramente diferente de  $2\pi$ , devido ao aparecimento da força de excitação. Se  $A$  for suficientemente grande, espera-se que a força externa domine as vibrações auto-excitadas e que o oscilador experimente sincronização (Chatterjee, 2009).

## 2.5 Modelação das vibrações induzidas por vórtices

Ao abordar a dinâmica duma estrutura esbelta sujeita a um escoamento transversal e o seu enquadramento nas Vibrações Induzidas por Vórtices, é frequente recorrer-se a modelos semi-empíricos tais como, os modelos de esteira oscilante, cujas soluções permitem descrever a dinâmica referida.

Uma vez que a maioria das estruturas têm deformações praticamente lineares, podem ser consideradas como osciladores lineares.

A natureza da auto-excitação associada à libertação de vórtices, sugere que o comportamento do fluido possa ser modelado por um oscilador não linear simples. As ideias básicas de mecânica de fluidos em que os modelos de esteira oscilante se baseiam são as seguintes:

- Um escoamento não viscoso é uma boa aproximação para o campo de escoamento fora da esteira próxima;
- Cria-se uma estrada de vórtices com uma frequência de formação de vórtices bem definida;
- A vorticidade gera-se apenas na camada limite do cilindro e os vórtices crescem de forma uniforme até atingirem uma força máxima;
- O escoamento é bidimensional;
- A força exercida no cilindro pelo escoamento depende apenas da velocidade e da aceleração de um escoamento médio relativamente ao cilindro.

Através de vários factos experimentais é possível concluir que (Blevins, 1990):

- Os modelos de esteira oscilante mostram que a frequência natural do oscilador de fluido é proporcional ao rácio entre a velocidade do escoamento livre e o diâmetro do cilindro;
- Estes modelos conseguem prever que um cilindro irá exibir grandes amplitudes de oscilação quando a frequência de libertação de vórtices é próxima ou igual à frequência natural desse cilindro. A resposta do cilindro é função do rácio entre estas duas frequências ( $f_s$  e  $f$ ), do amortecimento viscoso estrutural e do rácio entre a massa de fluido deslocada e a massa do cilindro;
- O modelo exibe um efeito de sincronização (um exemplo é a sincronização de  $f_s$  e  $f$ ), este aumenta com a diminuição do amortecimento estrutural e com o aumento do rácio entre a massa de fluido deslocada e a massa do cilindro (exceto nos casos em que o amortecimento estrutural é muito pequeno). À medida que o amortecimento estrutural se aproxima de zero, o modelo prevê que a vibração induzida por vórtices atinja uma amplitude máxima limitativa. Este limite deve-se à redução da componente de excitação da força do fluido com o aumento de amplitude;
- O pico de amplitude de ressonância pode ser expresso através de apenas uma variável, o amortecimento reduzido. A amplitude aumenta com a diminuição desta variável, até atingir um limite máximo de amplitude.

## 2.6 Otimização

Muitas vezes é necessário determinar funções que aproximem dados experimentais, para isso utiliza-se a otimização. As técnicas de otimização consistem em encontrar a melhor combinação de parâmetros para maximizar ou minimizar (dependendo do tipo de problema) uma função, normalmente designada por função objetivo ou função aproximadora.

A função aproximadora,  $f$ , recorre a parâmetros cuja escolha permite obter o ajuste pretendido de  $f$  a esses dados. É importante definir o erro associado à aproximação feita, para este efeito, é frequente calcular o quadrado da norma Euclideana do resíduo. Este será zero se a função interpolar exatamente os dados experimentais.

Seja  $f$  a função aproximadora e  $(x_1, y_1), (x_m, y_m)$ , os dados a aproximar, vetor resíduo ( $R$ ) define-se por:

$$\bar{R} = (f(x_1) - y_1, f(x_2) - y_2, \dots, f(x_m) - y_m) \quad (2.45)$$

e o quadrado da norma Euclideana do resíduo permite definir o erro  $E$  da aproximação:

$$E = \| \bar{R} \|^2 \quad (2.46)$$

O método dos mínimos quadrados baseia-se na escolha dos parâmetros que definem  $f$ , que minimize o erro  $E$ . Após definir a função objetivo (através deste ou outro método), esta será minimizada através das técnicas de otimização.

### 2.6.1 Técnicas de otimização

Existem dois grandes tipos de técnicas de otimização, as clássicas e as heurísticas, dependendo da natureza do problema. As técnicas clássicas apoiam-se, normalmente, em argumentos analíticos deduzidos a partir do conhecimento das taxas de crescimento, derivadas, derivadas parciais, da função objetivo a otimizar. A sua utilização exige, em geral, que as variáveis do problema se localizem no seio dum espaço suficientemente regular e que a função objetivo seja suficientemente “suave”. O método dos gradientes conjugados é um exemplo de técnica clássica, ver (Press et al., 2007).

Já as técnicas heurísticas mimetizam, normalmente, processos naturais evolutivos e são suscetíveis de ser aplicadas na resolução de problemas de otimização para os quais as abordagens clássicas são inapropriadas como é o caso de problemas de otimização combinatória. Os algoritmos genéticos que se inserem no contexto dos algoritmos e métodos evolutivos são exemplo duma importante técnica heurística de otimização, inspirada em processos naturais evolutivos, consultar (Holland, 1992). Em (Goldberg, 1989) e em (Michalewicz, 1998) pode encontrar-se a formulação deste método devidamente enquadrado e com aplicações relevantes. Também a técnica de *simulated annealing* constitui um exemplo de método heurístico de otimização.

### 2.6.2 Simulação de recozimento

A técnica de *simulated annealing* (simulação de recozimento) foi originalmente desenvolvida por Metropolis e colaboradores, ver (Metropolis et al., 1953) tendo sido aplicada de forma eficiente na resolução do conhecido problema do caixeiro viajante. É uma técnica heurística que consiste numa analogia com a termodinâmica, uma vez que é inspirada na técnica de recozimento de metais no contexto das tecnologias dos materiais.

O processo de recozimento de um sólido (de preferência um metal) consiste em expô-lo a temperaturas elevadas, até que este atinja a sua temperatura de fusão, passando ao estado líquido. Depois de derreter, o metal terá

de arrefecer lentamente para evitar que este atinja um estado pouco estável. Ao diminuir lentamente a temperatura do metal, as moléculas ajustam-se e rearranjam-se até que a rede cristalina atinja um estado de energia mínima (Press et al., 2007).

Da mesma forma que o recozimento de um metal tem como objetivo atingir um estado de energia mínima, a simulação de recozimento como técnica de otimização, tem como propósito encontrar uma solução que permita minimizar a função objetivo. Este método adequa-se a problemas de otimização, onde o extremo global desejado se encontra entre um conjunto de vários extremos locais e a sua implementação inclui os seguintes elementos:

1. Descrição das configurações possíveis para o sistema;
2. Criação de arranjos na configuração, estas alterações serão as opções apresentadas ao sistema;
3. Função objetivo  $E$  (analogia com energia) que se pretende minimizar;
4. Parâmetro de controlo  $T$  (analogia com temperatura), com respetivo número de passos e tamanho.

O método de simulação do recozimento tem a particularidade de apresentar uma implementação intuitiva e sem grandes complexidades e que constitui uma abordagem eficaz a problemas de otimização não lineares em domínios de pesquisa complexos (Press et al., 2007). Esta técnica será adotada na resolução deste tipo de problemas de otimização, na secção referente ao estudo do acoplamento combinado deste trabalho. A técnica será utilizada para calibração de parâmetros desconhecidos, que serão ajustados com base em dados experimentais.





## Capítulo 3

# Modelos de esteira oscilante: acoplamentos isolados

Nos capítulos 3 e 4 iremos estudar os modelos de esteira oscilante. A abordagem aos modelos de esteira oscilante, neste capítulo, consiste no estudo de cada acoplamento individualmente (acoplamento em aceleração, acoplamento em velocidade e acoplamento em deslocamento).

Inicialmente será feita uma distinção entre a formulação dimensional (modelo com dimensões físicas) e a formulação adimensional (em que se trabalha com as equações adimensionalizadas) deste tipo de modelo. Realçando a adimensionalização com referência à frequência da esteira, seguida neste trabalho e baseada no trabalho de Facchinetti (Facchinetti et al., 2004).

Posteriormente, será feito um estudo numérico dos diferentes tipos de acoplamento separadamente. Numa primeira fase, as simulações numéricas serão feitas com base nos dados físicos e geométricos de Facchinetti e, numa segunda fase, serão feitas com base em dados físicos e geométricos retirados de (Belloli et al., 2015), por forma a reforçar as conclusões e resultados que se obtiverem.

### 3.1 Formulação dimensional

Tipicamente, os modelos de esteira oscilante são constituídos por duas equações diferenciais acopladas: uma equação diferencial não linear de 2ª ordem (normalmente, a equação de Van der Pol), que descreve a esteira e uma equação diferencial linear de 2ª ordem que descreve o comportamento da estrutura esbelta. Esta abordagem foi inicialmente introduzida em (Hartlen and Currie, 1970), seguindo sugestões apresentadas em (Bishop and Hassan, 1964). Em (Wu and Kareem, 2012), encontra-se uma interessante abordagem

à modelação das vibrações induzidas por vórtices em cilindros.

A formulação, que a seguir se apresenta, permite modelar a oscilação transversa em translação da estrutura que está associada ao desenvolvimento de forças de sustentação. Na equação de Van der Pol, que modela o fluido, observa-se uma analogia entre a variável da esteira  $Q$  e essas mesmas forças. Além disso, o oscilador de Van Der Pol é um elemento importante no modelo pois traduz o processo de transferência de energia por parte do escoamento para a estrutura, o que permite amplificar e manter a oscilação, mesmo existindo forças dissipativas.

É de salientar que as duas equações do modelo se encontram acopladas, o que permite representar a influência que a estrutura exerce na esteira (modificando a força de sustentação) mas também a influência da esteira (através dessa mesma sustentação) na estrutura.

É possível formular diferentes acoplamentos neste modelo: sabe-se que a estrutura é excitada pela força de sustentação associada à resposta da esteira e que a esteira é excitada (na equação de Van der Pol) pela resposta da estrutura. No entanto, tanto se pode excitar a esteira com a aceleração da estrutura, como com a sua velocidade, como com o seu deslocamento. Daqui resultam três possíveis implementações de acoplamentos, o acoplamento em aceleração, em velocidade ou em deslocamento, respetivamente.

É importante referir que durante a interação fluido-estrutura, que aqui se pretende modelar, desenvolvem-se forças de arrasto. Neste modelo, por ser de apenas um grau de liberdade, não é possível modelar o efeito destas forças, no entanto, se se acautelarem mais graus de liberdade, é possível considerar este efeito. Por outro lado, o modelo aqui apresentado é, em grande medida, puramente fenomenológico e, por isso, apresenta limitações decorrentes desse facto.

De seguida, apresenta-se o modelo com dimensões físicas, tendo por base o acoplamento em aceleração.

Seja  $Y = Y(T)$  o movimento do cilindro, em função do tempo  $T$ , excitado pela força de sustentação (*lift force*)  $F_L = F_L(T)$  que depende do coeficiente de sustentação  $C_L = C_L(T)$ . Assumindo que a oscilação da esteira  $Q = Q(T)$  é proporcional a  $C_L$ :

$$Q(T) = \frac{2C_L(T)}{C_{L0}} \quad (3.1)$$

onde  $C_{L0}$  representa um coeficiente de sustentação apropriado (de Langre, 2006).

A força de sustentação,  $F_L$ , pode ser escrita como (Facchinetti et al.,

2004):

$$F_L = \frac{1}{2}\rho U^2 DLC_L, \quad (3.2)$$

onde  $\rho$  e  $U$  representam respetivamente a massa volúmica do fluido e a velocidade do escoamento uniforme.  $D$  representa o diâmetro do cilindro e  $L$ , o seu comprimento.

O movimento de um cilindro rígido, de diâmetro  $D$ , elasticamente suportado, com um grau de liberdade e excitado pela variável da esteira  $Q$  proporcional à sustentação, pode ser descrito por:

$$(m_S + m_F)\ddot{Y} + (r_S + r_F)\dot{Y} + hY = \frac{1}{4}\rho U^2 DC_{L0}Q, \quad (3.3)$$

onde  $m_S$ ,  $r_S$  e  $h$  são a massa, o amortecimento e a rigidez do movimento do cilindro no vácuo e  $(\cdot)$  representa a derivada temporal. O amortecimento,  $r_S$ , do movimento do cilindro pode ser descrito por:

$$r_S = 2(m_S + m_F) \underbrace{\sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}}_{\Omega_S} \xi \quad (3.4)$$

onde  $\xi$  representa o amortecimento reduzido da estrutura.  $\Omega_S$  representa a velocidade angular natural da estrutura em fluido estacionário, associada à frequência  $f$  de oscilação da estrutura.

$$f = \frac{\Omega_S}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}}{2\pi} \quad (3.5)$$

O efeito do fluido no escoamento deve ser analisado considerando, a massa de fluido acrescentada,  $m_F$  e o amortecimento de fluido acrescentado,  $r_F$ :

$$m_F = \frac{1}{4}\pi\rho D^2 C_M \quad (3.6)$$

$$r_F = 2\pi \underbrace{\frac{S_T U}{D}}_{\Omega_{S_T}} \gamma \rho D^2 \quad (3.7)$$

O coeficiente de fluido acrescentado,  $\gamma$ , relaciona o coeficiente de arrasto,  $C_D$ , com o número de Strouhal, através de:

$$\gamma = \frac{C_D}{4\pi S_T} \quad (3.8)$$

A oscilação da esteira  $Q = Q(T)$  é descrita pela equação de Van der Pol, veja-se (Facchinetti et al., 2004):

$$\ddot{Q} + \varepsilon \Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = \frac{A}{D} \ddot{Y}, \quad (3.9)$$

onde  $\Omega_{s_T} = 2\pi f_S$  representa a velocidade angular de libertação de vórtices (associada à frequência angular de Strouhal):

$$\Omega_{s_T} = 2\pi \frac{S_T U}{D}, \quad (3.10)$$

Em relação à equação da esteira, pode observar-se que esta está a ser excitada pela aceleração da estrutura,  $\ddot{Y}$ . Neste caso, e tal como em (Facchinetti et al., 2004), o tipo de acoplamento é em aceleração. Existem três variantes possíveis para a excitação da esteira, o deslocamento, velocidade ou aceleração da estrutura. Para escolher o tipo de acoplamento a estudar, basta inserir na equação de Van der Pol, o termo  $Y$ ,  $\dot{Y}$  ou  $\ddot{Y}$ , para o acoplamento em deslocamento, em velocidade e em aceleração, respetivamente.

Para o acoplamento em aceleração, o modelo de esteira oscilante, assume então a seguinte forma:

$$\begin{cases} (m_S + m_F) \ddot{Y} + (r_S + r_F) \dot{Y} + hY = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L0} Q \\ \ddot{Q} + \varepsilon \Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = \frac{A}{D} \ddot{Y} \end{cases}. \quad (3.11)$$

As duas Equações (3.11) encontram-se acopladas uma vez que, por um lado, a estrutura é excitada pela força de sustentação associada à resposta da esteira e, por outro lado, a esteira é excitada pela resposta da estrutura.

Apesar do acoplamento em aceleração (Facchinetti et al., 2004) se revelar a tendência atual, existem autores que adotaram outros acoplamentos. Nomeadamente, (Landl, 1975), (Hartlen and Currie, 1970), (Skop and Griffin, 1973) e (Iwan and Blevins, 1974), utilizaram o acoplamento em velocidade e (Krenk and Nielsen, 1999), o acoplamento em deslocamento. Uma vertente deste trabalho passa pelo estudo da possibilidade de considerar a opção de uma combinação linear que envolva as três componentes referidas da resposta da estrutura: o deslocamento, a velocidade e a aceleração. Uma forma de o fazer é elaborar uma perspetiva de calibração apropriada dos coeficientes de acoplamento tendo em vista, não só, validar a tendência atual do acoplamento em aceleração, mas também, tentar aperfeiçoar o modelo atual dotando-o de um acoplamento distinto e mais adequado. Esta abordagem encontra-se no capítulo 4.

## 3.2 Formulação adimensional

Estabelecida a formulação dimensional, passou-se ao estudo do modelo na sua forma adimensional. Partindo das dimensões físicas e tornando-as adimensionais, obtém-se uma forma mais simples do modelo e as equações passam a depender de menos fatores. Além disso, a adimensionalização permite agrupar num menor número de classes dinamicamente equivalentes o fenómeno em estudo, permitindo levar mais longe a respetiva análise, utilizando um idêntico número de testes.

Apresentam-se de seguida dois tipos de adimensionalização do modelo de esteira oscilante em estudo. A formulação adotada por (Facchinetti et al., 2004), realiza a adimensionalização da variável temporal tendo por base o movimento da esteira. Já na formulação adotada por (de Langre, 2006), a adimensionalização da variável temporal é realizada tendo por base o movimento da estrutura.

Para as simulações numéricas utilizaremos a formulação adimensional do modelo de esteira oscilante adotado por (Facchinetti et al., 2004), por forma a facilitar a comparação dos nossos resultados com os de Facchinetti. Por uma questão de completude apresentam-se, de seguida, ambas as formulações. Pese embora apresentem formas diferentes, as equações homogêneas obtidas para a estrutura e a esteira, nos dois modelos, são equivalentes.

De realçar que as formulações introduzidas dizem respeito à modelação de oscilações transversas, com um grau de liberdade, de um cilindro rígido elasticamente suportado e exposto a um escoamento uniforme e estacionário.

### 3.2.1 Adimensionalização com referência à oscilação da esteira

No trabalho de Facchinetti, a adimensionalização da variável temporal em (3.11) é feita tendo como referência a frequência da esteira (3.10).

$$\Omega_{s_T} = 2\pi \frac{S_T U}{D}.$$

Na dedução deste modelo e adotando a metodologia de (Facchinetti et al., 2004), admite-se que o acoplamento das equações que o constituem é realizado com base na resposta da esteira e na aceleração da estrutura.

O movimento de um cilindro rígido, de diâmetro  $D$ , elasticamente suportado, com um grau de liberdade, pode ser descrito pela Equação (3.3). Para obter a sua forma adimensional, considerando a frequência de oscilação da esteira, veja-se:

$$\ddot{Y} + \left( 2\xi\Omega_S + \frac{\gamma}{\mu}\Omega_{s_T} \right) \dot{Y} + \frac{h}{m}Y = \frac{S}{m}. \quad (3.12)$$

onde  $\mu$  representa a viscosidade dinâmica do fluido e  $S$  define a força de excitação.

$$\mu = \frac{m_S + m_F}{\rho D^2} \quad (3.13)$$

$$S = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{L0} Q \quad (3.14)$$

Tendo em conta estes e os outros parâmetros já apresentados e utilizados da secção anterior, nomeadamente  $m = m_S + m_F$ ,  $m_F = \frac{1}{4}\pi\rho D^2 C_M$ ,  $r_S = 2m\Omega_S\xi$ ,  $r_F = \Omega_{s_T}\gamma\rho D^2$ , pretende-se chegar a uma descrição adimensional da Equação (3.3). Para isso, consideremos a frequência  $\Omega_{s_T}$  da esteira e as seguintes mudanças de variável:

$$t = \Omega_{s_T} T, \quad (3.15)$$

$$y(t) = \frac{Y(T)}{D}, \quad (3.16)$$

$$q(t) = Q(T). \quad (3.17)$$

Definindo  $\delta$  como a frequência angular reduzida da estrutura:

$$\delta = \frac{\Omega_S}{\Omega_{s_T}}, \quad (3.18)$$

somos conduzidos, após algumas manipulações algébricas, à expressão adimensional:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left( 2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu} \right) \frac{dy}{dt} + \delta^2 y = s. \quad (3.19)$$

A força de excitação  $s$  resultante é

$$s = MQ \quad (3.20)$$

em que

$$M = \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_T^2 \mu}. \quad (3.21)$$

A oscilação da esteira  $Q = Q(T)$  pode, como vimos, ser descrita pela Equação de Van der Pol (3.9).

$$\ddot{Q} + \varepsilon\Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = \frac{A}{D}\ddot{Y},$$

Considerando o seu primeiro membro, chamando  $\frac{F}{D}$  à força de excitação da esteira e tendo por base as mudanças de variável (3.15 e 3.17).

No domínio temporal, obtemos

$$\ddot{Q} + \varepsilon \Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = \frac{F}{D}, \quad (3.22)$$

e deduz-se a expressão procurada:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q = f. \quad (3.23)$$

Neste modelo adimensional a excitação  $f$  da esteira que utilizaremos nas simulações, análises e discussões terá origem no deslocamento, na velocidade e na aceleração da estrutura.

Resumidamente, as equações adimensionalizadas do modelo de esteira oscilante, tendo como referência a frequência da esteira, são:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( 2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu} \right) \frac{dy}{dt} + \delta^2 y &= s \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q &= f \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde

$$s = Mq \text{ com } M = \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_T^2 \mu}$$

e

$$f = Ay, \quad f = Ay' \text{ ou } f = Ay''.$$

Em síntese, os principais parâmetros e variáveis a utilizar são:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Omega_S}{\Omega_{s_T}} \\ \gamma &= \frac{C_D}{4\pi S_T} \\ \mu &= \frac{m_S + m_F}{\rho D^2} \\ \Omega_S &= \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \\ \Omega_{s_T} &= 2\pi \frac{S_T U}{D} \end{aligned}$$

Para mais detalhes, consulte-se o Apêndice (A.2).

### 3.2.2 Adimensionalização com referência à oscilação da estrutura

No trabalho de E. de Langre, (de Langre, 2006), a adimensionalização de (3.11) é feita tendo como referência a velocidade angular natural da estrutura em fluido estacionário,  $\Omega_S$ , associada à frequência  $f$  de oscilação da estrutura (3.5).

$$f = \frac{\Omega_S}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}}{2\pi}.$$

Também na dedução deste modelo e adotando a metodologia seguida por (de Langre, 2006), se admite que o acoplamento das equações que o constituem é realizado com base na resposta da esteira e na aceleração da estrutura.

Para obter a forma adimensional de (3.3), considerando a frequência angular natural da estrutura em fluido estacionário e as mudanças de variável (3.25, 3.16 e 3.17):

$$\begin{aligned} t &= \Omega_S T, \\ y(t) &= \frac{Y(T)}{D}, \\ q(t) &= Q(T) \end{aligned} \tag{3.25}$$

obtém-se:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + y = M \Omega^2 q, \tag{3.26}$$

onde  $\Omega = S_T U_r$  representa a frequência adimensional e  $U_r = \frac{2\pi U}{\Omega_S D}$  representa a velocidade reduzida. Definam-se ainda  $\lambda$  (3.27),  $M$  (3.21) e  $\mu$  (3.13).

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\xi + \frac{\gamma}{\mu} \Omega, \\ M &= \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_T^2 \mu}, \\ \mu &= \frac{m_S + m_F}{\rho D^2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

De forma semelhante e tendo por base a Equação (3.9):

$$\ddot{Q} + \varepsilon \Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = \frac{A}{D} \ddot{Y},$$

deduz-se a correspondente formulação adimensionalizada da equação da esteira:



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon \Omega (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + \Omega^2 q = A \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (3.28)$$

Tendo em conta, o significado dos parâmetros usados e definidos acima, o modelo de esteira oscilante adimensional, de acordo com (de Langre, 2006), assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + y &= M \Omega^2 q \text{ e} \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon \Omega (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + \Omega^2 q &= A \frac{d^2 y}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde  $\Omega$  representa a frequência adimensional, atrás definida. Para mais detalhes, consulte-se o Apêndice (A.1).

Tal como referido anteriormente, a formulação em que a adimensionalização é feita com referência à frequência da estrutura, é aqui apresentada por uma questão de completude. O modelo adotado nesta dissertação, é o utilizado por Facchinetti, a formulação em que a adimensionalização é feita com base na frequência de oscilação da esteira.

### 3.3 Simulações numéricas

Por forma a estudar o modelo de esteira oscilante introduzido, realizaram-se e analisaram-se simulações numéricas para prever o comportamento oscilatório de uma estrutura cilíndrica genérica, e as forças de sustentação que daí resultam. Nesta secção, os modelos de esteira oscilante serão materializados por via da escolha apropriada das variáveis de acoplamento utilizadas.

Tendo por base a adimensionalização do modelo baseada na frequência da esteira, os dados físicos e geométricos de Facchinetti e o acoplamento em aceleração, velocidade e deslocamento (estudados separadamente), as principais peculiaridades exibidas pelo modelo serão apresentadas, discutidas e ilustradas com simulações numéricas.

Os coeficientes  $C_M$  (coeficiente de massa acrescentada)  $S_T$ ,  $C_{L0}$  e  $\gamma$  serão considerados constantes. Em (Blevins, 1990) mostra-se que  $C_M = 1$ ,  $S_T = 0.2$  no espectro subcrítico do número de Reynolds,  $300 < Re < 1.5 \times 10^5$  e que  $C_{L0} = 0.3$  num grande espectro de números de Reynolds. Assume-se ainda que  $\gamma = 0.8$ . Assumiremos, também, preliminarmente que  $\varepsilon = 0.3$  e  $A = 12$ , valores estes considerados adequados em (Facchinetti et al., 2004).

O desempenho dos diferentes tipos de acoplamento será também ilustrado com dados geométricos e físicos distintos (retirados de (Belloli et al., 2015) e que podem ser consultados nas Tabelas 4.1 e 4.3, para o número de Scruton

( $Sc$ ) = 0.50 e para  $Sc = 3.60$ , respetivamente) por forma a reforçar as conclusões e resultados que se obtiverem.

Para cada um dos acoplamentos será feita uma análise, com base nas simulações numéricas realizadas, das respostas vibratórias da estrutura e da esteira antes, durante e depois do *lock-in*. Como referido anteriormente, este fenómeno verifica-se num intervalo de velocidades durante o qual a frequência de vibração da estrutura coincide com a frequência da esteira (a de libertação de vórtices). Neste intervalo de velocidades, as amplitudes oscilatórias da estrutura aumentam muito e verificam-se alterações nas diferenças de fase entre a esteira e a estrutura.

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam-se os valores físicos adotados nas simulações numéricas, utilizando as unidades do Sistema Internacional (SI).

$D$ [m]	$m_S$ [kg/m]	$\xi$	$h$ [N/m <sup>2</sup> ]
0.02	0.3	0.01	$10^5$

Tabela 3.1: Principais parâmetros estruturais.

$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\gamma$	$C_M$	$C_{L0}$	$S_T$	$\varepsilon$	$A/B/C$
1000	0.8	1	0.3	0.2	0.3	12

Tabela 3.2: Principais parâmetros do fluido, do escoamento e da esteira.

Apesar de ter utilizado o modelo adimensional (3.24) nos cálculos, optou-se por apresentar, nas tabelas, os resultados usando os parâmetros com significado físico.

Os diferentes tipos de acoplamento serão testados, para que se possa analisar o que apresenta melhores resultados. Para testar o acoplamento em deslocamento, em velocidade e em aceleração, substituiremos em (3.24),  $f$  por  $f = Cy$ ,  $f = By'$  ou  $f = Ay''$ , respetivamente.

Para as integrações temporais das equações utilizou-se a rotina `ode45` do MATLAB, que implementa o algoritmo *Runge-Kutta* de 4<sup>a</sup>/5<sup>a</sup> ordem.

Inicialmente realizaram-se as respostas temporais. Para isso, optou-se por fazer os cálculos para um ciclo de velocidades reduzidas ( $U_r$ ) de 1 até 10, com intervalos de 0.5. Estes gráficos mostram, por um lado, o movimento do cilindro ( $y$ ) em função do tempo e, por outro lado, a resposta oscilatória da esteira ( $q$ ) em função do tempo ( $t$ ). Qualquer uma destas respostas oscilatórias e o tempo encontram-se na sua forma adimensional. Procedeu-se também ao cálculo da diferença de fase instantânea entre o sinal correspondente à esteira e o sinal correspondente ao cilindro. Para isso, utilizou-se a Transformada de Hilbert, que permite detetar o ângulo de fase num sinal temporal (Corinthios, 2007).

Com base nas respostas temporais calcularam-se as Transformadas de Fourier discretas, a partir das quais se determinaram os vetores de densidade de energia espectral, um associado ao cilindro (linha a vermelho), outro associado à esteira (linha a preto). A densidade espectral representa a distribuição de potência no domínio da frequência e corresponde ao quadrado da amplitude da Transformada de Fourier do sinal (James, 2011). Os gráficos de respostas frequenciais, mostram, para cada valor de  $U_r$ , a densidade de energia espectral em função da frequência adimensional.

Por último, tendo em vista ilustrar a evolução da densidade de energia espectral em função da velocidade, elaborou-se a construção de um gráfico *waterfall*. O gráfico *waterfall* vai incorporar todos os resultados anteriores e além de mostrar a sequência das várias densidades de energia espectral calculadas, apresenta também a linha de Strouhal. Quando a frequência do cilindro é igual à frequência da esteira, ou seja, quando no gráfico, o quociente  $f/f_s$  é igual a 1, a densidade de energia espectral experimenta um aumento acentuado em amplitude, aproximando-se da linha de Strouhal. Quando se dá este aumento de amplitude, estamos perante o fenómeno de sincronização (*lock-in*). Criou-se um gráfico *waterfall* relativo ao movimento do cilindro e um referente ao movimento da esteira, provenientes do gráfico de densidade espectral do cilindro e da esteira, respetivamente.

### 3.3.1 Acoplamento em aceleração

Como referido anteriormente, as simulações temporais mostram o movimento oscilatório do cilindro ( $y$ ) e a resposta oscilatória da esteira ( $q$ ), ambos em função do tempo ( $t$ ). Mostram também o desfasamento (instantâneo e médio) entre a resposta da esteira e a da estrutura. Relativamente às respostas frequenciais, a linha vermelha representa a resposta do cilindro e a linha preta indica a resposta da esteira.

Nas Figuras 3.1 e 3.2 podemos observar a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 2$ , referente ao acoplamento em aceleração.

Pode observar-se, a partir da resposta temporal, que a amplitude de oscilação da estrutura  $y$  nos picos, é cerca de 0.01, já a amplitude oscilatória da esteira  $q$ , é muito pequena inicialmente, atingindo depois o valor de 2. Em relação à resposta frequencial observa-se que, para o quociente  $f/f_s$  igual a 1, não existem picos na densidade de energia espectral. Estas observações levam a concluir que, para a velocidade reduzida de  $U_r = 2$ , as respostas vibratórias da esteira e da estrutura ainda não se encontram em *lock-in*.

Nas Figuras 3.3 e 3.4 podemos observar a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 5$ , referente ao

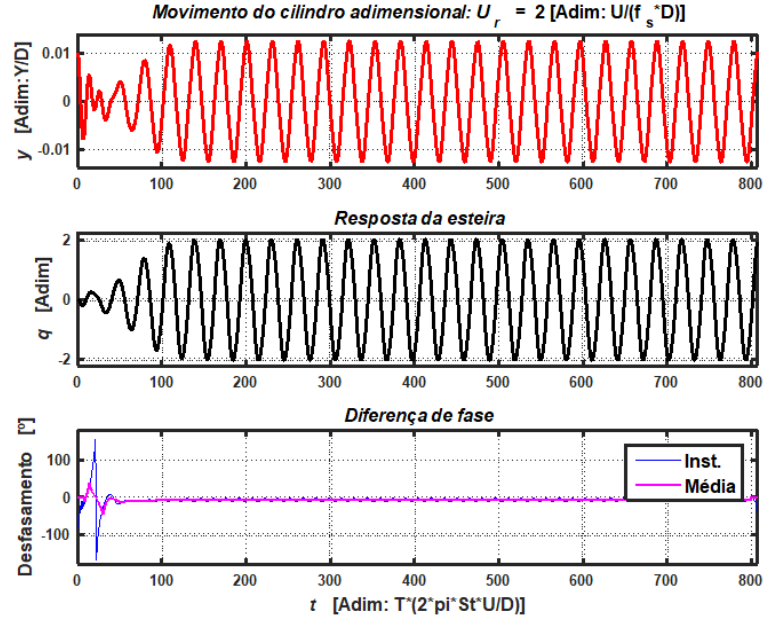


Figura 3.1: Resposta temporal para  $Ur = 2.0$  - acoplamento em aceleração.

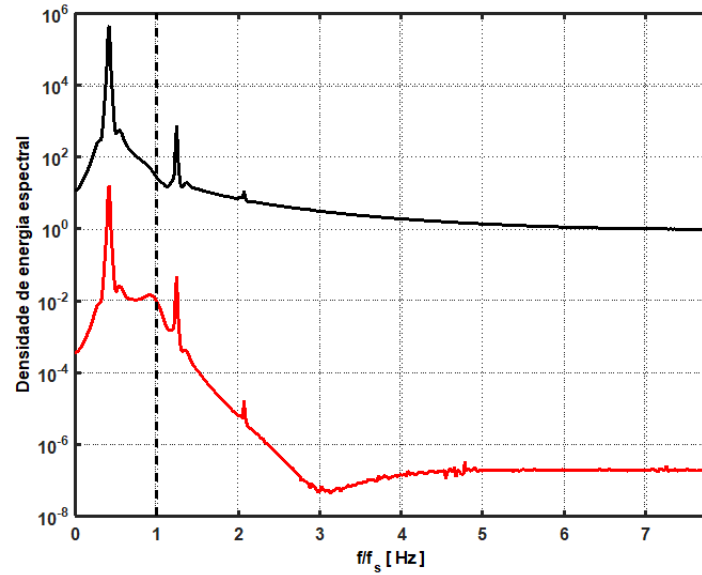


Figura 3.2: Resposta frequencial para  $Ur = 2.0$  - acoplamento em aceleração.

acoplamento em aceleração.

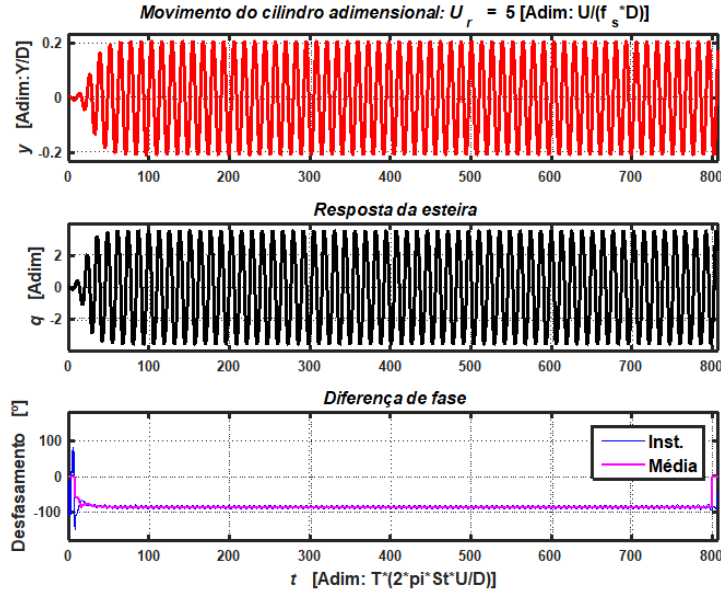


Figura 3.3: Resposta temporal para  $Ur = 5.0$  - acoplamento em aceleração.

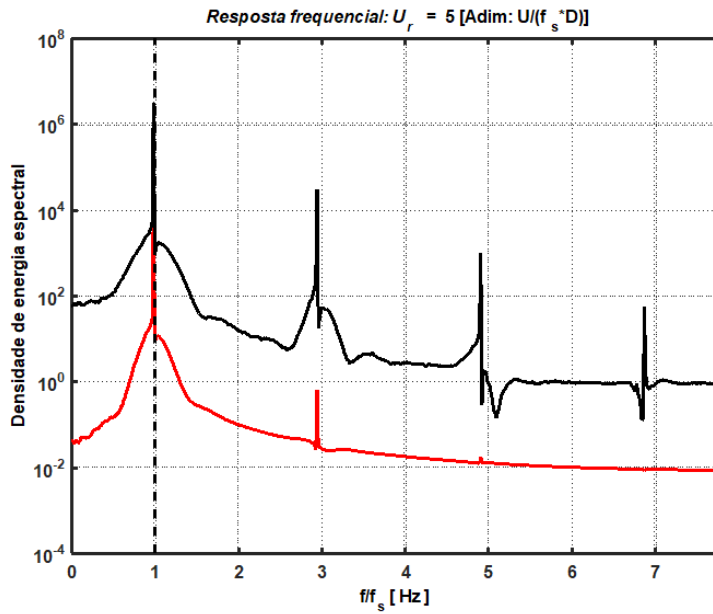


Figura 3.4: Resposta frequencial para  $Ur = 5.0$  - acoplamento em aceleração.

Pode observar-se que a resposta oscilatória da estrutura  $y$ , aumenta bastante, passando para 0.2, a amplitude oscilatória da esteira  $q$ , fixa-se bem mais cedo no valor de 2. Em relação à resposta frequencial observa-se que, para o quociente  $f/f_s$  igual a 1, há um pico acentuado de densidade de energia espectral. Estas observações levam a concluir que, para a velocidade reduzida de  $U_r = 5$ , as respostas vibratórias da esteira e da estrutura se encontram em *lock-in*.

Como se sabe, o *lock-in* pode verificar-se num intervalo de velocidades, que constitui uma vizinhança de  $U_r = 5$ . Veja-se o apêndice (B.1) onde se encontram todas as simulações temporais e onde se pode constatar que os picos de frequência, de amplitudes de oscilação e de densidade espectral se verificam, pelo menos, até à velocidade de  $U_r = 7$ .

Nas Figuras 3.5 e 3.6 podemos observar a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 9$ , referente ao acoplamento em aceleração.

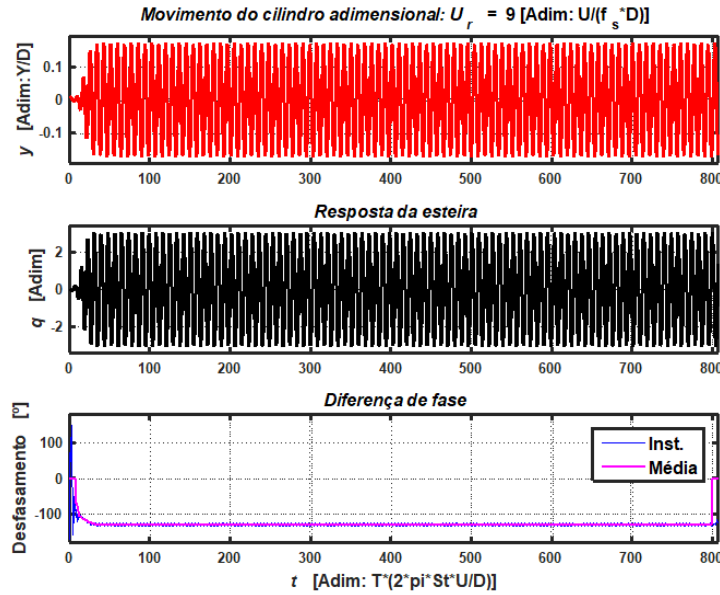


Figura 3.5: Resposta temporal para  $U_r = 9.0$  - acoplamento em aceleração.

Pode observar-se, pela resposta temporal, que a amplitude de oscilação da estrutura  $y$  volta a diminuir para 0.01, já a amplitude oscilatória da esteira  $q$ , mantém-se no valor de 2. Os picos na densidade de energia espectral verificados na resposta frequencial encontram-se, para esta velocidade, deslocados da zona do quociente  $f/f_s$  igual a 1. Pode concluir-se, deste modo, pelas respostas vibratórias da estrutura e esteira, que para uma velocidade

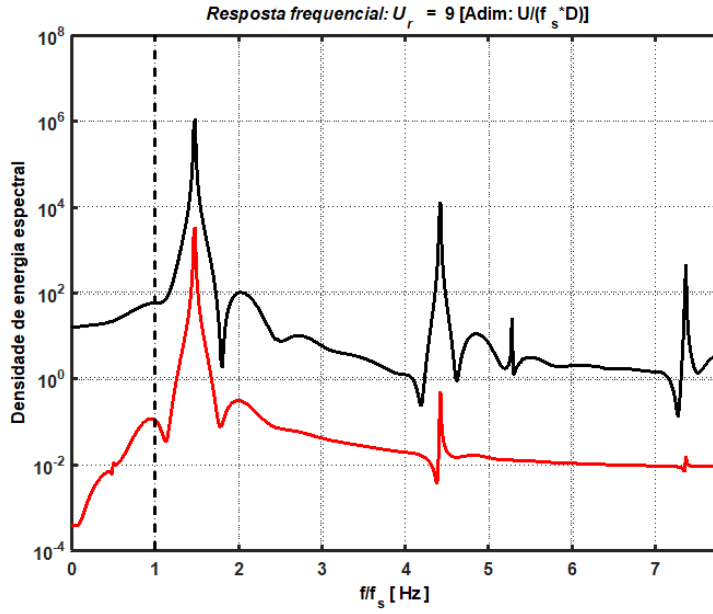


Figura 3.6: Resposta frequencial para  $U_r = 9.0$  - acoplamento em aceleração.

reduzida de  $U_r = 9$ , o sistema se encontra na fase do pós *lock-in*.

Relativamente ao gráfico waterfall do acoplamento em aceleração, observem-se as Figuras 3.7 e 3.8 que representam o movimento do cilindro e o movimento da esteira, respetivamente. Neste tipo de gráfico, incorporam-se as conclusões discutidas anteriormente, observa-se o pico na densidade de energia espectral ( $PSD$ ), para a velocidade reduzida de  $U_r = 5$ , na linha que representa o *lock-in* ( $f/f_s = 1$ ).

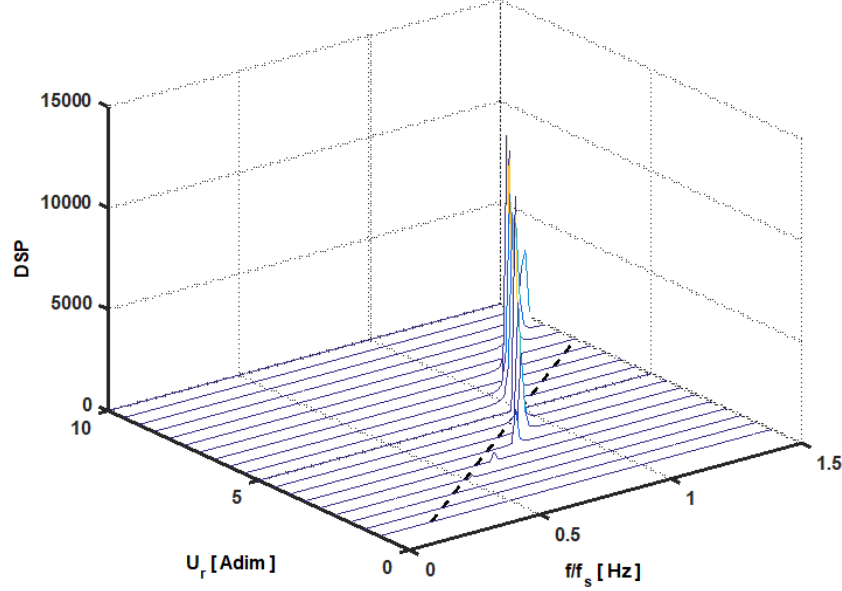


Figura 3.7: Waterfall cilindro - acoplamento em aceleração.

Deste modo, conclui-se que, para o acoplamento em aceleração, até se atingir o *lock-in*, até à velocidade reduzida de  $U_r = 5$  (por exemplo, a  $U_r = 2$ ) o sistema experimenta um aumento das amplitudes de oscilação da estrutura e da esteira. As máximas amplitudes são atingidas quando a frequência de oscilação do cilindro iguala a frequência de oscilação da esteira, também nesta fase, se verifica um pico na densidade de energia espectral, o que se dá numa vizinhança de velocidades reduzidas de  $U_r = 5$ . Após o *lock-in*, a velocidades reduzidas maiores (por exemplo a  $U_r = 9$ ), as amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, bem como a densidade de energia espectral, começam a diminuir novamente.

Os restantes gráficos representativos das simulações temporais, referentes ao acoplamento em aceleração encontram-se no apêndice (B.1).

### Simulações numéricas complementares

Tendo em vista estudar adicionalmente este tipo de acoplamento (aceleração) num sistema diferente, realizaram-se diversas simulações numéricas exploratórias tendo por base dados geométricos e físicos substancialmente diferentes, recolhidos de (Belloli et al., 2015). Nas simulações apresentadas considerou-se o coeficiente de acoplamento  $A/B/C = 12$  e  $\varepsilon = 0.3$ , seguindo as recomendações de Facchinetti. Os dados geométricos e físicos utilizados



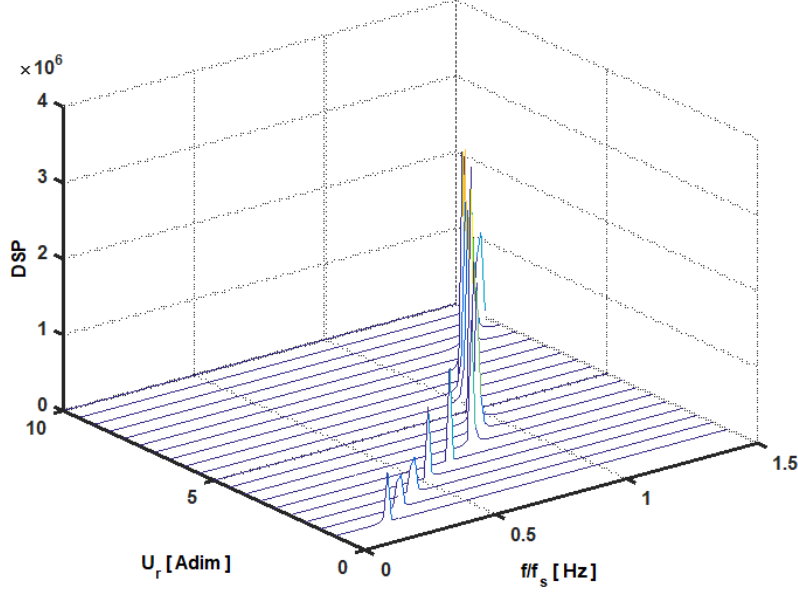


Figura 3.8: Waterfall esteira - acoplamento em aceleração.

apresentam-se nas Tabelas 3.3 e 3.4.

$D$ [m]	$m_s$ [kg/m]	$S_T$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$C_M$	$C_{L0}$	$A/B/C$	$\varepsilon$
0.2	6.5	0.18	1225	1	0.3	12	0.3

Tabela 3.3: Principais parâmetros geométricos e físicos, para qualquer  $Sc$ .

	$C_D$	$\xi$
$Sc = 0.50$	3.8	0.0006
$Sc = 3.60$	1.7	0.0041

Tabela 3.4: Parâmetros físicos para  $Sc = 0.50, Sc = 3.60$ .

Para o acoplamento em aceleração, aplicado aos dados de Belloli referentes a  $Sc = 0.50$  (presentes na Tabela 4.1), veja-se a Tabela 3.5 representativa dos resultados e a Figura 3.9 representativo da resposta temporal em *lock-in*.

Para o acoplamento em aceleração, aplicado aos dados de Belloli referentes a  $Sc = 3.60$  (presentes na Tabela 4.3), veja-se a Tabela 3.6 representativa dos resultados e a Figura 3.10 representativo da resposta temporal em *lock-in*.

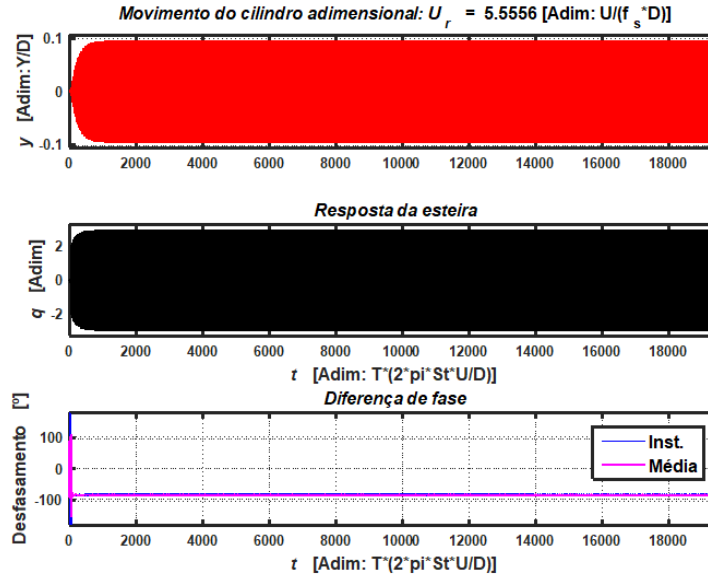


Figura 3.9: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 0.50$  - acoplamento em aceleração.

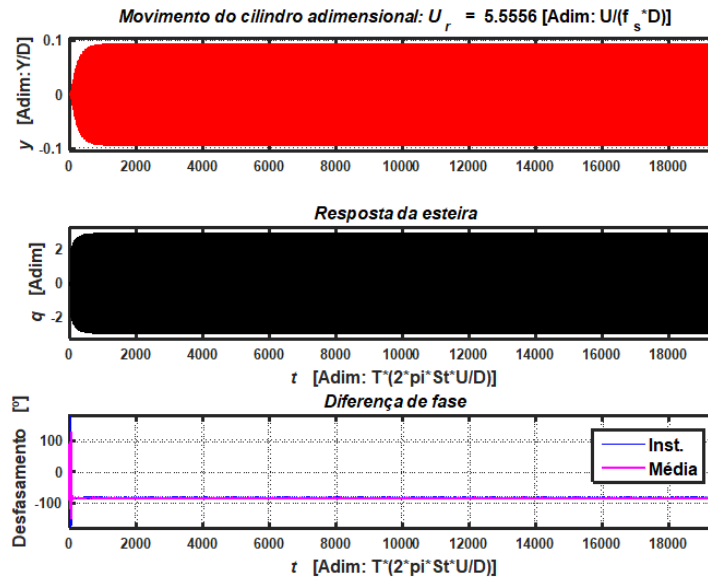


Figura 3.10: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 3.60$  - acoplamento em aceleração.

$Sc = 0.50$	$y \text{ min}$	$y \text{ max}$	$q \text{ min}$	$q \text{ max}$
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.1	0.1	-3	3
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	-2	2

Tabela 3.5: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para  $Sc = 0.50$  - acoplamento em aceleração.

$Sc = 3.60$	$y \text{ min}$	$y \text{ max}$	$q \text{ min}$	$q \text{ max}$
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.1	0.1	-3	3
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	-2	2

Tabela 3.6: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para  $Sc = 3.60$  - acoplamento em aceleração.

Comparando os dados de Belloli, com estes resultados, verifica-se que os valores de  $y$  e de  $q$  se assemelham aos de  $z/D$  e  $C_L$ . Conclui-se que o acoplamento em aceleração se adapta satisfatoriamente à realidade dos dados experimentais.

### 3.3.2 Acoplamento em velocidade

As simulações realizadas para o acoplamento em velocidade seguem o mesmo raciocínio das do acoplamento em aceleração. Observem-se as Figuras 3.11 e 3.12 que representam a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 2$ , referente ao acoplamento em velocidade.

Tal como no acoplamento em aceleração, a amplitude de oscilação da estrutura  $y$  e a amplitude oscilatória da esteira  $q$  são muito pequenas, para a velocidade reduzida de  $U_r = 2$ . Através do gráfico da resposta frequencial observa-se que os dois sistemas respondem, como esperado, à mesma frequência; Esta frequência não corresponde a frequência da estrutura o que explica o facto da oscilação da estrutura ser pequena, verificam-se também alguns harmónicos devido à não-linearidade do oscilador. Conclui-se assim que, para o acoplamento em velocidade o sistema ainda não se encontra em *lock-in*, a uma velocidade reduzida de  $U_r = 2$ . Enquanto que para o acoplamento em aceleração, o *lock-in* se dá a uma velocidade reduzida de cerca de  $U_r = 5$ , para o acoplamento em velocidade, este fenómeno dá-se a uma velocidade superior. Pode confirmar-se pelo gráfico correspondente à velocidade  $U_r = 5$  (no apêndice B.2) que o sistema, para essa velocidade, ainda não experimenta as máximas amplitudes de oscilação nem o pico da densidade

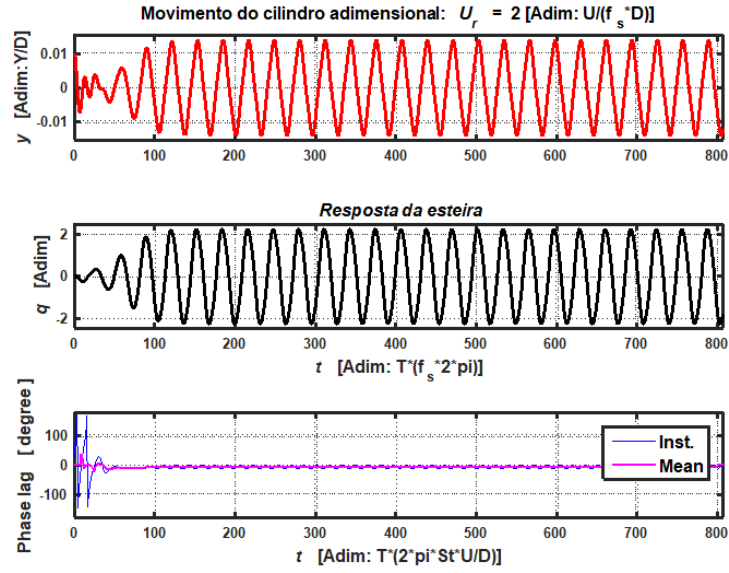


Figura 3.11: Resposta temporal para  $Ur = 2.0$  - acoplamento em velocidade.

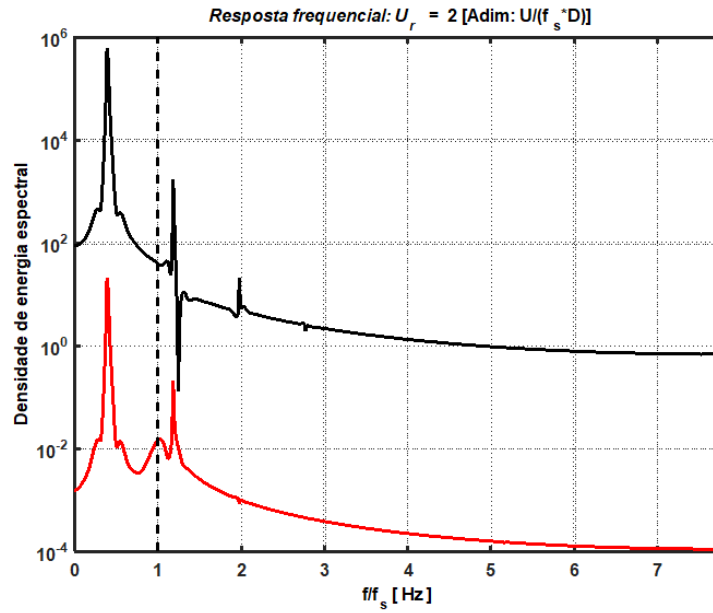


Figura 3.12: Resposta frequencial para  $Ur = 2.0$  - acoplamento em velocidade.

de energia espectral.

Observem-se agora as Figuras 3.13 e 3.14 que representam a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 8$ , referente ao acoplamento em velocidade.

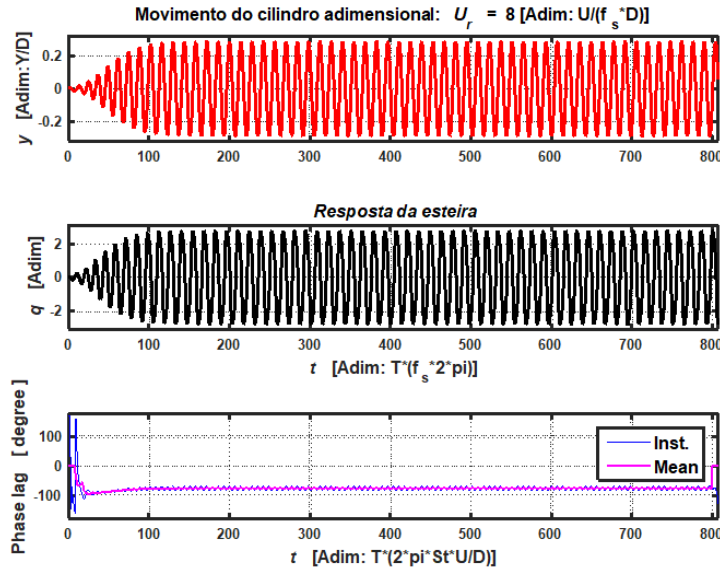


Figura 3.13: Resposta temporal para  $U_r = 8.0$  - acoplamento em velocidade.

Nestas figuras já se pode observar um aumento considerável na resposta oscilatória da estrutura  $y$  e da esteira  $q$ . Em relação à resposta frequencial observa-se que, para o quociente  $f/f_s$  igual a 1, há um pico acentuado de densidade de energia espectral. Estas observações levam a concluir que, para a velocidade reduzida de  $U_r = 8$ , as respostas vibratórias da esteira e da estrutura se encontram em *lock-in*. Tal como no acoplamento em aceleração, este fenómeno dá-se numa vizinhança de velocidades e pode constatar-se que, os picos de frequência, de amplitudes de oscilação e de densidade espectral se verificam até à velocidade de  $U_r = 9$ .

Vejam-se, ainda, as Figuras 3.15 e 3.16 que representam a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 10$ , referente ao acoplamento em velocidade.

Claramente, para a velocidade reduzida de  $U_r = 10$ , o sistema já não se encontra em *lock-in*. As amplitudes de oscilação da estrutura e da esteira voltam a diminuir, assim como as respetivas frequências e também a densidade de energia espectral.

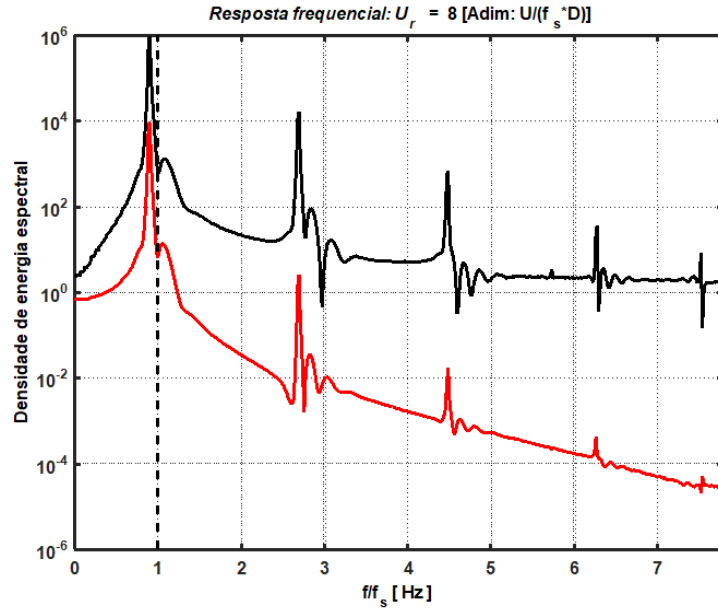


Figura 3.14: Resposta frequencial para  $U_r = 8.0$  - acoplamento em velocidade.

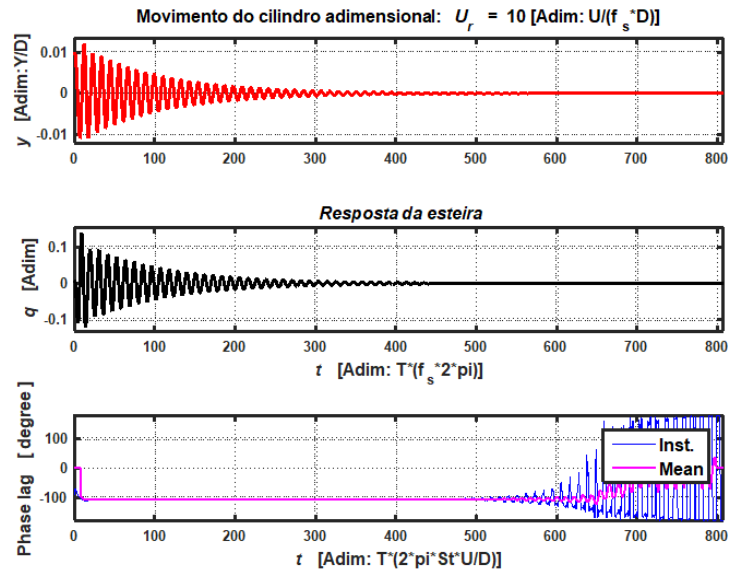


Figura 3.15: Resposta temporal para  $U_r = 10.0$  - acoplamento em velocidade.

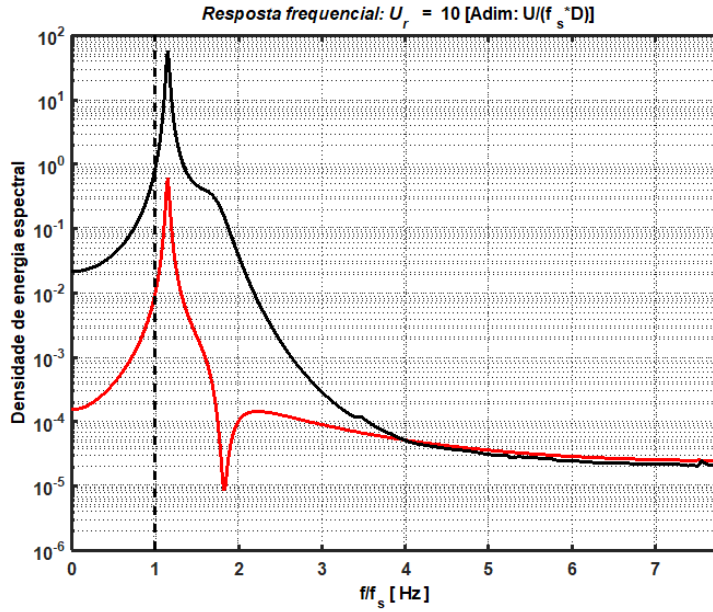


Figura 3.16: Resposta frequencial para  $U_r = 10.0$  - acoplamento em velocidade.

Relativamente ao gráfico waterfall do acoplamento em velocidade, observem-se as Figuras 3.17 e 3.18 que representam o movimento do cilindro e o movimento da esteira, respetivamente. Neste tipo de gráfico, incorporam-se as conclusões discutidas anteriormente, observa-se o pico na densidade de energia espectral ( $PSD$ ), para a velocidade reduzida de  $U_r = 8$ , na linha que representa o *lock-in* ( $f/f_s = 1$ ).

Deste modo, conclui-se que, para o acoplamento em velocidade, até se atingir o *lock-in*, até à velocidade reduzida de  $U_r = 8$  o sistema experimenta um aumento das amplitudes de oscilação da estrutura e da esteira. O pico destas amplitudes atinge-se quando a frequência de oscilação do cilindro iguala a frequência de oscilação da esteira, também nesta fase, se verifica um pico na densidade de energia espectral, o que se dá numa vizinhança de velocidades reduzidas de  $U_r = 8$ . Após o *lock-in*, a velocidades reduzidas maiores (por exemplo a  $U_r = 10$ ), as amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, bem como a densidade de energia espectral, começam a diminuir novamente.

Os restantes gráficos representativos das simulações temporais, referentes ao acoplamento em velocidade encontram-se no apêndice (B.2).

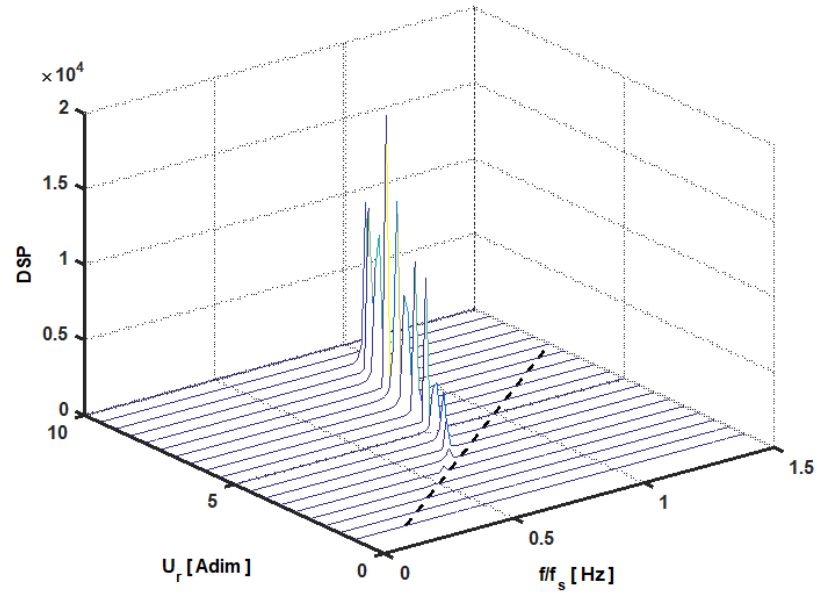


Figura 3.17: Waterfall cilindro - acoplamento em velocidade.

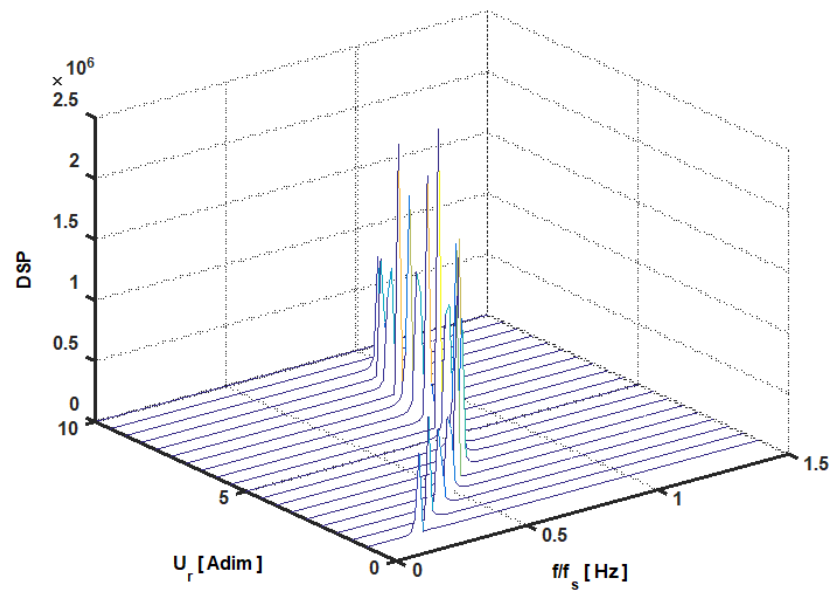


Figura 3.18: Waterfall esteira - acoplamento em velocidade.



### Simulações numéricas complementares

Nas simulações apresentadas de seguida considerou-se (o coeficiente de acoplamento  $A/B/C = 12$  e  $\varepsilon = 0.3$ ), seguindo as recomendações de Facchinetti e os dados de Belloli.

Para o acoplamento em velocidade, aplicado aos dados de Belloli referentes a  $Sc = 0.50$  (presentes na Tabela 4.1), veja-se a Tabela 3.7 representativa dos resultados e a Figura 3.19 representativa da resposta temporal em *lock-in*.

$Sc = 0.50$	$y$ min	$y$ max	$q$ min	$q$ max
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.02	0.02	-2	2
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	-2	2

Tabela 3.7: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para  $Sc = 0.50$  - acoplamento em velocidade.

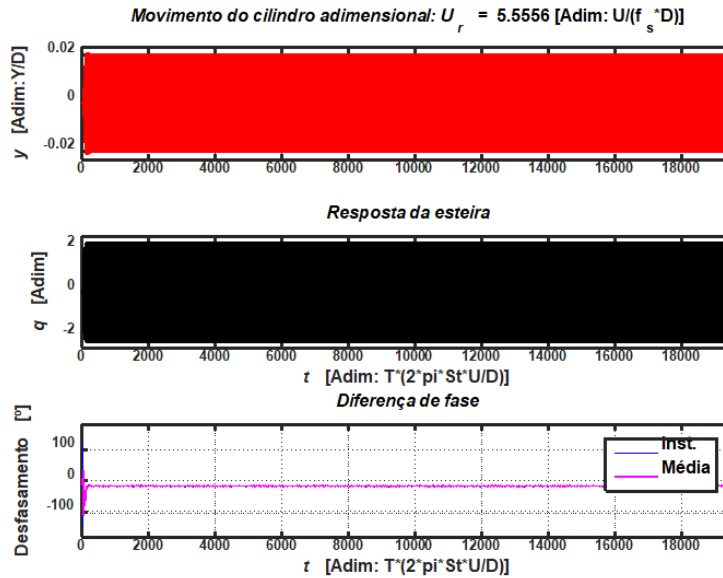


Figura 3.19: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 0.50$  - acoplamento em velocidade.

Para o acoplamento em velocidade, aplicado aos dados de Belloli referentes a  $Sc = 3.60$  (presentes na Tabela 4.3), veja-se a Tabela 3.8 representativa

$Sc = 3.60$	$y \text{ min}$	$y \text{ max}$	$q \text{ min}$	$q \text{ max}$
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.02	0.02	-2	2
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	-2	2

Tabela 3.8: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para  $Sc = 3.60$  - acoplamento em velocidade.

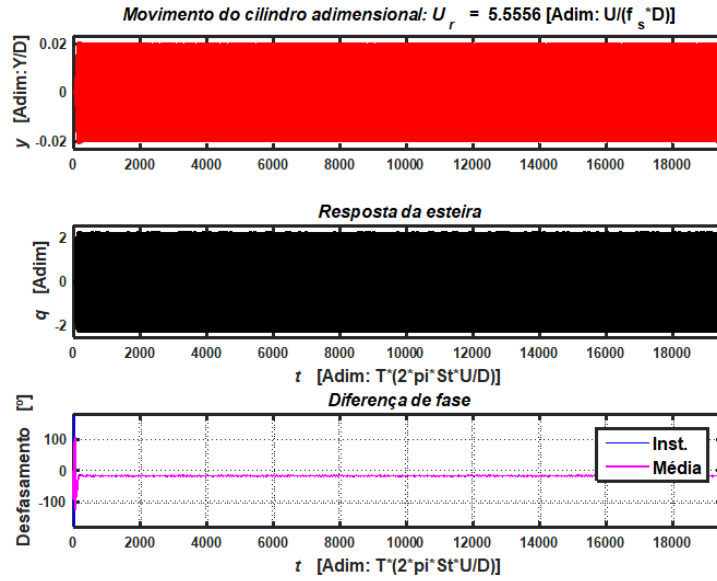


Figura 3.20: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 3.60$  - acoplamento em velocidade

dos resultados e a Figura 3.20 representativa da resposta temporal em *lock-in*.

Comparando os dados de Belloli, com estes resultados, verifica-se que os valores de  $y$  e de  $q$  se assemelham aos de  $z/D$  e  $C_L$ . Conclui-se que o acoplamento em velocidade se adapta satisfatoriamente à realidade dos dados experimentais.

### 3.3.3 Acoplamento em deslocamento

As simulações realizadas para o acoplamento em deslocamento seguem a mesma metodologia das do acoplamento em aceleração e em velocidade. Para este acoplamento, ao fixar o coeficiente de acoplamento,  $C$ , em 12, obtiveram-se respostas temporais e frequenciais diferentes dos restantes acoplamentos,

esta particularidade é analisada mais à frente. Ao fixar  $C$  em  $-12$ , este problema deixa de existir e as respostas obtidas já são coerentes com os restantes acoplamentos.

Observem-se as Figuras 3.21 e 3.22 que representam a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 2$ , referente ao acoplamento em deslocamento.

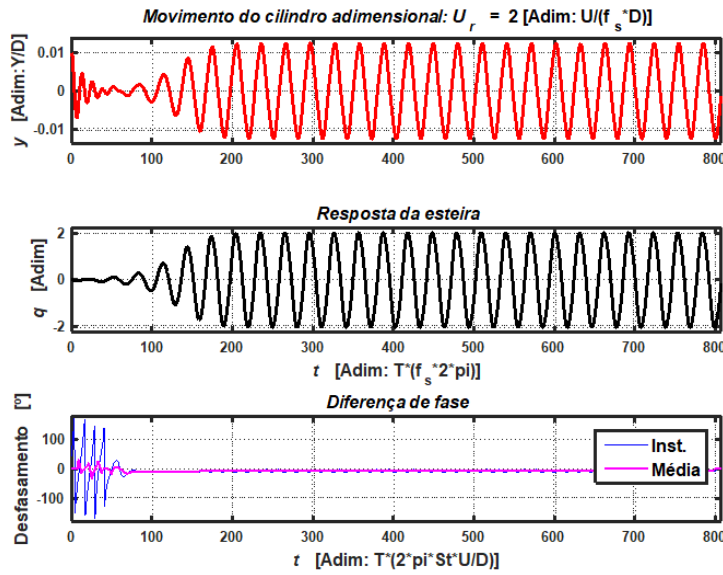


Figura 3.21: Resposta temporal, para  $U_r = 2.0$  - acoplamento em deslocamento.

Pode observar-se, pela resposta temporal, que a amplitude de oscilação da estrutura  $y$  e da esteira  $q$  ainda não atingiram os seus valores máximos. Em relação à resposta frequencial observa-se que, para o quociente  $f/f_s$  igual a 1, o pico na densidade de energia espectral, também ainda não foi atingido. Estas observações levam a concluir que, para a velocidade reduzida de  $U_r = 2$ , as respostas vibratórias da esteira e da estrutura ainda não se encontram em *lock-in*.

Vejam-se agora as Figuras 3.23 e 3.24 que representam a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 5$ , referente ao acoplamento em deslocamento.

Pode observar-se que ambas as amplitudes das respostas oscilatórias, da estrutura e da esteira, aumentam bastante. Em relação ao gráfico de densidade de energia espectral, este atinge o seu pico para o quociente  $f/f_s$  igual a 1. Estas observações levam a concluir que, para a velocidade reduzida de

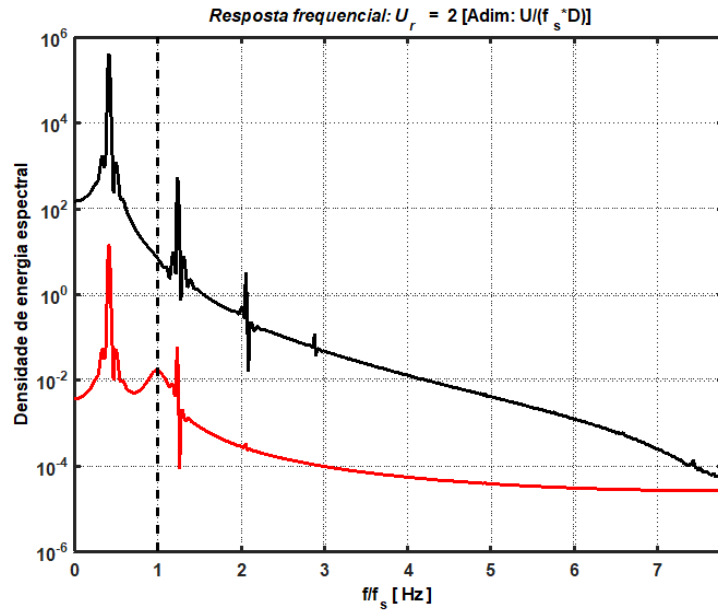


Figura 3.22: Resposta frequencial, para  $Ur = 2.0$  - acoplamento em deslocamento.

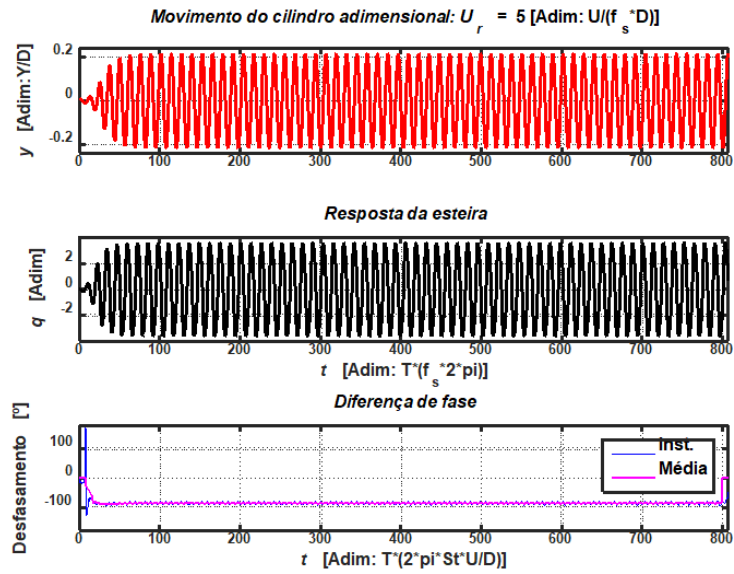


Figura 3.23: Resposta temporal, para  $Ur = 5.0$  - acoplamento em deslocamento.

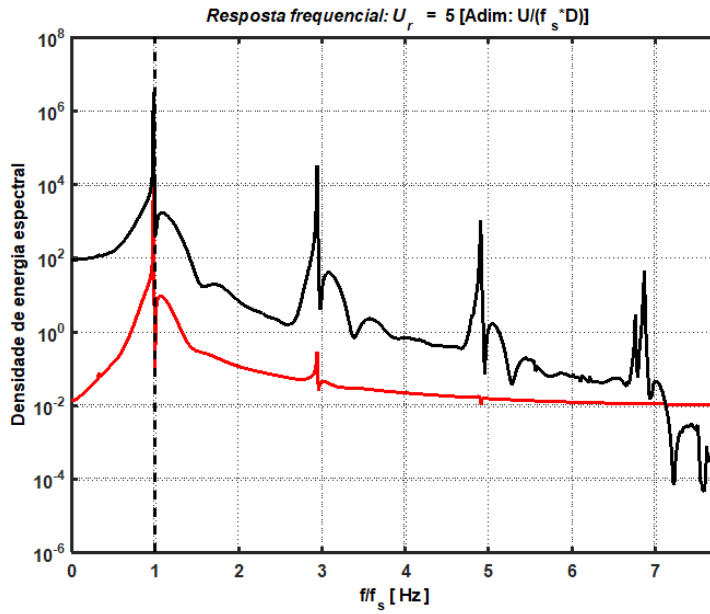


Figura 3.24: Resposta frequencial, para  $U_r = 5.0$  - acoplamento em deslocamento.

$U_r = 5$ , as respostas vibratórias da esteira e da estrutura se encontram em *lock-in*.

Vejam-se, ainda, as Figuras 3.25 e 3.26 que representam a resposta temporal e frequencial, respetivamente, para uma velocidade reduzida de  $U_r = 9.5$ , referente ao acoplamento em deslocamento.

Pode observar-se, pela resposta temporal, que mesmo depois do pico de amplitude, a oscilação da estrutura  $y$  se mantém elevada, a própria resposta oscilatória da esteira  $q$ , não experimenta uma diminuição em amplitude. O que poderia levar a concluir que o *lock-in* se mantém durante um espectro maior de velocidade, para o acoplamento em deslocamento. No entanto, os picos na densidade de energia espectral verificados na resposta frequencial, para velocidade de  $U_r = 9.5$ , já se encontram deslocados da zona do quociente  $f/f_s$  igual a 1. Deste modo, não se pode concluir que para uma velocidade reduzida de  $U_r = 9$ , o sistema se encontra na fase do pós *lock-in*. Uma hipótese é considerar que, para este acoplamento, o *lock-in* se mantém durante mais tempo, fazendo com que a fase do pós *lock-in* seja mais tardia.

Relativamente ao gráfico waterfall do acoplamento em deslocamento, observem-se as Figuras 3.27 e 3.28 que representam o movimento do cilindro e o movimento da esteira, respetivamente. Neste tipo de gráfico, incorporam-

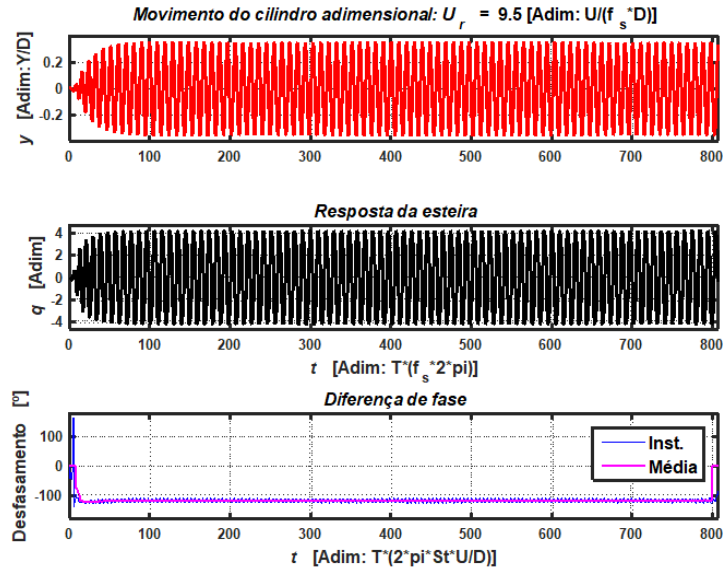


Figura 3.25: Resposta temporal, para  $U_r = 9.5$  - acoplamento em deslocamento.

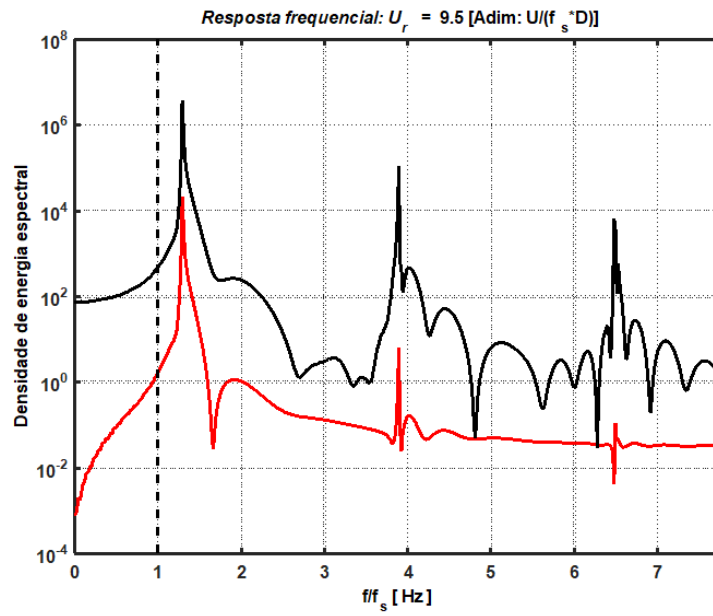


Figura 3.26: Resposta frequencial, para  $U_r = 9.5$  - acoplamento em deslocamento.

se as conclusões discutidas anteriormente, observa-se o pico na densidade de energia espectral ( $PSD$ ), para a velocidade reduzida de  $U_r = 5$ , na linha que representa o *lock-in* ( $f/f_s = 1$ ).

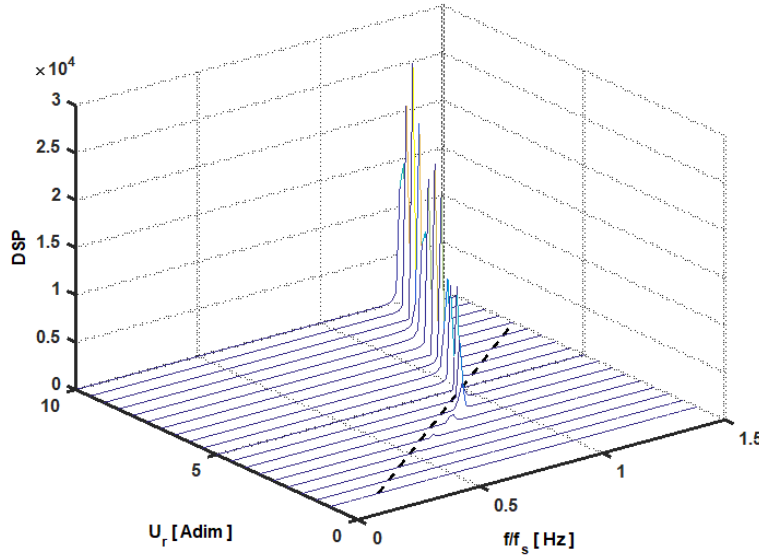


Figura 3.27: Waterfall cilindro - acoplamento em deslocamento.

Deste modo, conclui-se que, para o acoplamento em deslocamento, até se atingir o *lock-in*, até à velocidade reduzida de  $U_r = 5$ , o sistema experimenta um aumento das amplitudes de oscilação da estrutura e da esteira. O pico destas amplitudes atinge-se quando a frequência de oscilação do cilindro iguala a frequência de oscilação da esteira, também nesta fase, se verifica um pico na densidade de energia espectral, o que se dá numa vizinhança de velocidades reduzidas de  $U_r = 5$ . No entanto, para este acoplamento, os valores de amplitudes verificadas nos picos, mantêm-se, fazendo com que a fase do pós *lock-in*, seja mais tardia, relativamente a acoplamento em velocidade ou aceleração.

Os restantes gráficos representativos das simulações temporais, referentes ao acoplamento em deslocamento encontram-se no apêndice (B.3).

### Simulações numéricas complementares

Apesar de se ter verificado uma particularidade no comportamento vibratório do acoplamento em deslocamento, ao fixar o coeficiente de acoplamento  $C$  em 12, optou-se, ainda assim, por aplicar o acoplamento em deslocamento

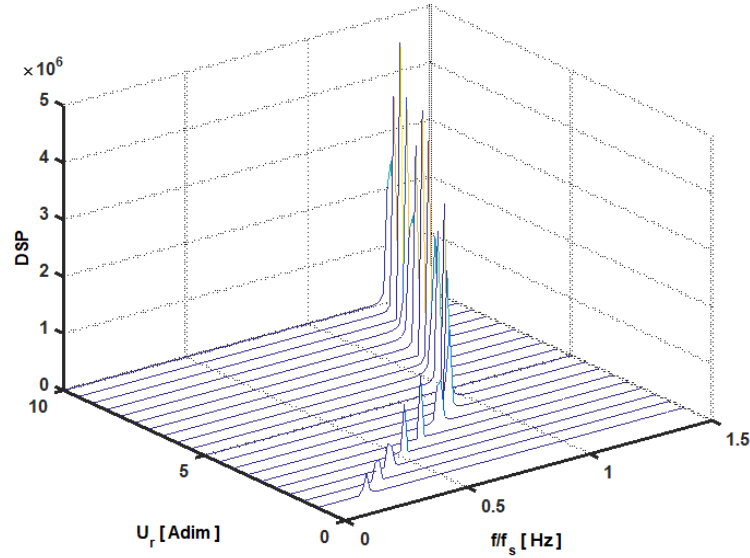


Figura 3.28: Waterfall esteira - acoplamento em deslocamento.

com as indicações de Facchinetti ( $C = 12$  e  $\varepsilon = 0.3$ ) aos dados de Belloli. Assim, aplicando-o aos dados de Belloli referentes a  $Sc = 0.50$  (presentes na Tabela 4.1), veja-se a Tabela 3.9 dos resultados e a Figura 3.29 representativa da resposta temporal em *lock-in*.

$Sc = 0.50$	$y$ min	$y$ max	$q$ min	$q$ max
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.01	0.01	-2	2
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	-2	2

Tabela 3.9: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para  $Sc = 0.50$  - acoplamento em deslocamento.

Para o acoplamento em deslocamento, aplicado aos dados de Belloli referentes a  $Sc = 3.60$  (presentes na Tabela 4.3), veja-se a Tabela dos resultados 3.10 e a Figura 3.30 representativa da resposta temporal em *lock-in*.

Comparando os dados de Belloli, com estes resultados, verifica-se que os valores de  $y$  e de  $q$  se assemelham aos de  $z/D$  e  $C_L$ . Conclui-se que o acoplamento em deslocamento se adapta satisfatoriamente à realidade dos dados experimentais.



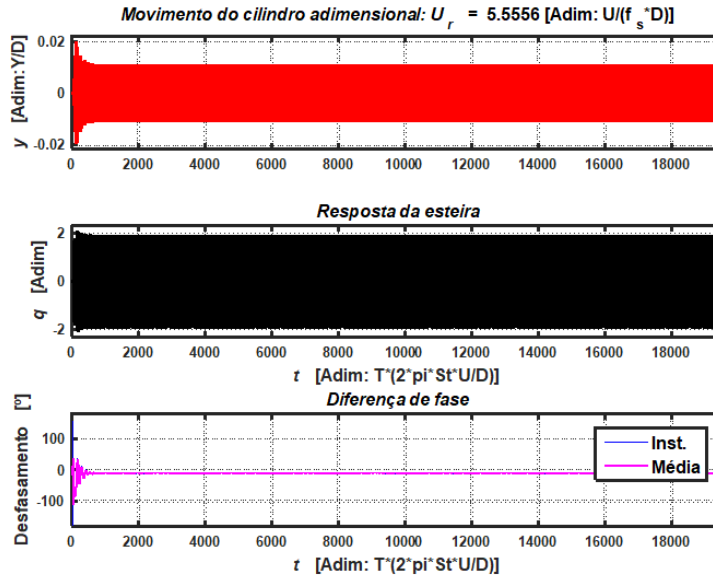


Figura 3.29: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 0.50$  - acoplamento em deslocamento.

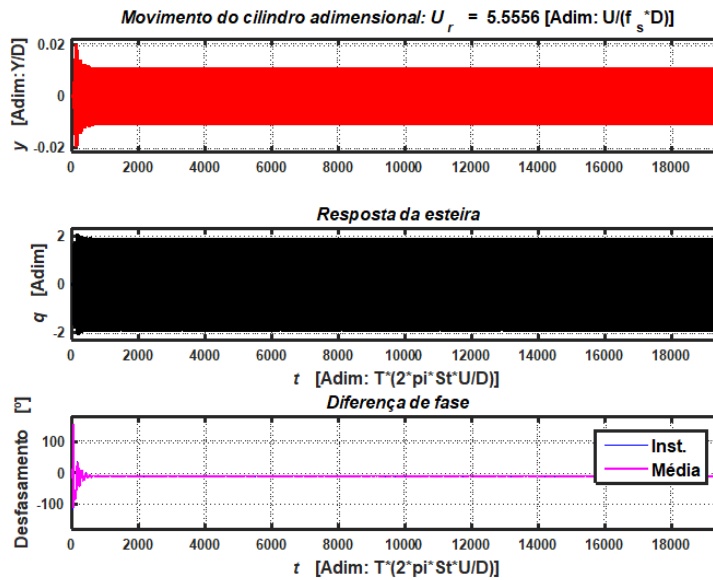


Figura 3.30: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 3.60$  - acoplamento em deslocamento.

$Sc = 3.60$	$y \text{ min}$	$y \text{ max}$	$q \text{ min}$	$q \text{ max}$
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.01	0.01	-2	2
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	-2	2

Tabela 3.10: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, para  $Sc = 3.60$  - acoplamento em deslocamento.

### Atenuação

Verificou-se uma particularidade no comportamento vibratório, relativamente ao acoplamento em deslocamento. Ao fixar o coeficiente de acoplamento,  $C$ , em 12, obtiveram-se as seguintes respostas temporais e frequenciais 3.31 e 3.32.

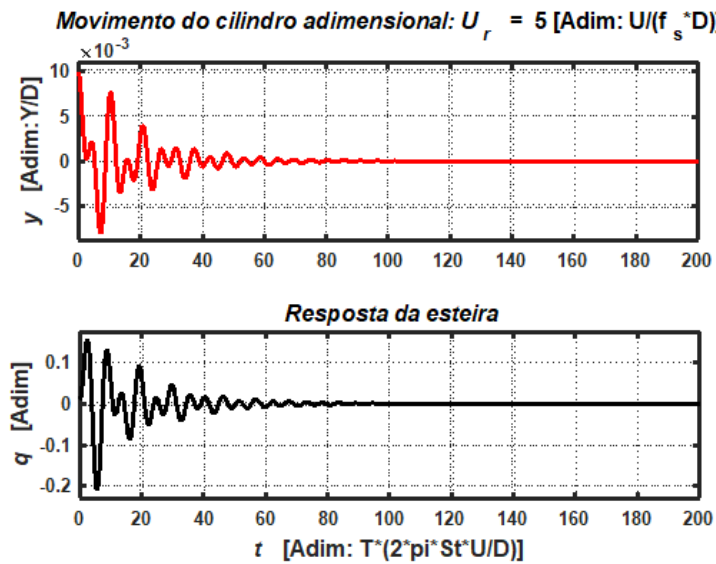


Figura 3.31: Atenuação do comportamento vibratório, resposta temporal, para  $U_r = 5.0$  - acoplamento em deslocamento.

Pode constatar-se que, para a velocidade a que se espera ocorrer *lock-in* (na vizinhança de  $U_r = 5$ ), em vez de se observar picos na amplitude de oscilação da esteira/ estrutura, observa-se que estes dois movimentos se cancelam reciprocamente. Verifica-se uma atenuação do comportamento vibratório, para esta velocidade, no caso do acoplamento em deslocamento. Após constatar esta peculiaridade para o acoplamento em deslocamento, averiguou-se se esta atenuação no comportamento vibratório também tem

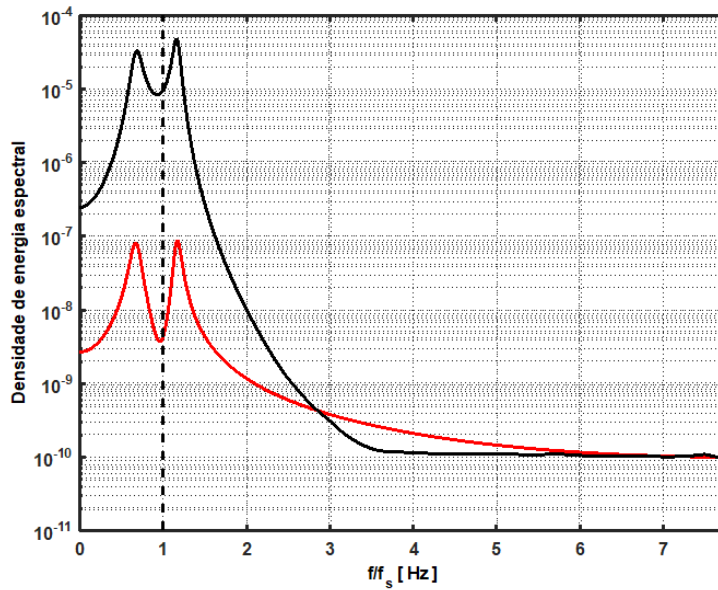


Figura 3.32: Atenuação do comportamento vibratório, resposta frequencial, para  $Ur = 5.0$  - acoplamento em deslocamento.

lugar para os restantes acoplamentos.

Assim, nas Tabelas 3.11, 3.12 e 3.13 testaram-se diferentes combinações de sinais dos coeficientes  $A$  (aceleração),  $B$  (velocidade),  $C$  (deslocamento) e  $M$  (coeficiente da esteira), para a velocidade típica de ocorrência de *lock-in*. A coluna relativa ao comportamento vibratório toma as designações de "atenuação" se o comportamento vibratório foi atenuado, de "atraso" se os picos de amplitudes se encontram em  $f/f_s < 1$ , de "avanço" se os picos de amplitudes se encontram em  $f/f_s > 1$  ou de "normal" se o comportamento vibratório não sofreu alterações.

$ C  = 12$	$C$	$M$	Comportamento
	+	+	Atenuação
	+	-	Normal
	-	+	Normal
	-	-	Atenuação

Tabela 3.11: Atenuação do comportamento vibratório, acoplamento em deslocamento.

Pode constatar-se que para os acoplamentos em deslocamento e em aceleração, se verifica atenuação do comportamento vibratório para certas combinações de sinais dos coeficientes. Já para o acoplamento em velocidade, há

$ B  = 12$	$B$	$M$	Comportamento
	+	+	Avanço
	+	-	Atraso
	-	+	Atraso
	-	-	Avanço

Tabela 3.12: Atenuação do comportamento vibratório, acoplamento em velocidade.

$ A  = 12$	$A$	$M$	Comportamento
	+	+	Normal
	+	-	Atenuação
	-	+	Atenuação
	-	-	Normal

Tabela 3.13: Atenuação do comportamento vibratório, acoplamento em aceleração.

apenas um desvio dos picos de amplitude oscilatória, o *lock-in* verifica-se à mesma, apenas se encontra atrasado ou adiantado em relação à velocidade de  $U_r \approx 5$ .

O fenómeno de atenuação estará relacionado com a ocorrência de processos de re-alimentação negativa que ocorre no sistema, por efeito do sinal dos termos de excitação (no 2º membro das equações) em cada equação, que ficarão em oposição de fase relativamente à frequência de oscilação natural de qualquer das equações. No caso do acoplamento em velocidade, como o termo de excitação já se encontra em oposição de fase, ao ser forçado com sinal negativo, deixa de estar em oposição de fase, fazendo com que o fenómeno de atenuação não se verifique.

### 3.4 Conclusões

Nesta secção foi feito um estudo numérico de cada acoplamento individualmente. Inicialmente realizaram-se simulações numéricas, com dados físicos e geométricos de Facchinetti e posteriormente elaboraram-se simulações numéricas com os dados experimentais de Belloli, combinados com parâmetros de Facchinetti ( $A/\varepsilon$ ). Testaram-se, ainda, diferentes combinações de sinais dos coeficientes de acoplamento e verificou-se uma atenuação no comportamento vibratório, do acoplamento em deslocamento, averiguou-se se esta peculiaridade também constava nos restantes acoplamentos.

Observando os dados experimentais (Figura 11 de (Belloli et al., 2015)), em *lock-in*, os parâmetros  $z/D$  e  $C_L$ , assumem os valores absolutos de,

aproximadamente, 0.1 e 0.75, respetivamente. Nas simulações realizadas nesta fase de testes, obtiveram-se valores absolutos de  $y$  ( $0.01 < y < 0.1$ ) e de  $q$  ( $2 < q < 3$ ) muito semelhantes aos dados. Conclui-se que qualquer acoplamento isolado se adapta bem à realidade dos dados experimentais.

Com este conjunto de testes reforça-se a ideia, presente na literatura, de que o acoplamento em aceleração é o mais adequado a modelar comportamento vibratório do sistema estrutura/esteira.

Conclui-se, ainda, que o acoplamento em aceleração é o mais eficaz na excitação de sistemas a frequências elevadas e que o acoplamento em deslocamento tem a propriedade contrária.

Relativamente à atenuação do comportamento vibratório, constatou-se que para os acoplamentos em deslocamento e em aceleração, se verifica este fenómeno para certas combinações de sinais dos coeficientes de acoplamento.

O facto de serem detetadas diferenças no comportamento qualitativo exibido pelos diferentes tipos de acoplamento reforça a possibilidade de se ensaiar combinações lineares dos 3 acoplamentos, tendo em vista procurar reproduzir melhor o comportamento qualitativo/quantitativo dos sistemas reais.



## Capítulo 4

# Modelos de esteira oscilante: acoplamento combinado

Apesar de não existir unanimidade, o acoplamento em aceleração é o que reúne um maior consenso por parte da comunidade científica. No entanto, iremos testar, neste capítulo, uma combinação dos três acoplamentos (aceleração, velocidade e deslocamento). Para isso, utilizaremos as equações adimensionalizadas com base na frequência da esteira, e iremos excitar a estrutura, como habitualmente, por  $Mq$  e excitar a esteira com uma combinação linear das respostas da estrutura em aceleração, velocidade e deslocamento. Designemos este acoplamento por acoplamento combinado.

O oscilador acoplado que se obtém desta nova formulação (acoplamento combinado) contém parâmetros desconhecidos, nomeadamente, os coeficientes de cada acoplamento ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), o coeficiente de acoplamento  $M$  da variável de esteira  $q$  e o parâmetro de Van der Pol ( $\varepsilon$ ). Tendo como objetivo calibrar estes parâmetros, houve necessidade de utilizar dados experimentais sincronizados referentes às variáveis  $(q_0, y_0, \omega, \alpha)$  que descrevessem o sistema durante a ocorrência do fenómeno de *lock-in*, pois é nesta fase que o comportamento do sistema apresenta características não-lineares que nos interessa modelar. De realçar que nesta situação, as frequências oscilatórias da esteira e da estrutura coincidem, e a estrutura pode apresentar uma resposta cuja amplitude pode comprometer a sua integridade.

Os dados experimentais utilizados foram recolhidos a partir do trabalho recente de Belloli (Belloli et al., 2015). As equações destinadas a implementar o ajuste e calibração dos parâmetros foram obtidas recorrendo à metodologia de balanço harmónico. O ajuste e calibração foi feito através do método de otimização *Simulated Annealing*.

## 4.1 Balanço harmónico

A obtenção das equações destinadas a calibrar os parâmetros ajustáveis é feita com base na metodologia de balanço harmónico. O balanço harmónico consiste em postular a resposta harmónica da estrutura e da esteira com uma frequência comum (a frequência de *lock-in*) e diferença de fase  $\alpha$  e determinando, assim, as relações entre as amplitudes da excitação e resposta em cada uma das equações. Os procedimentos de balanço harmónico conduziram às Equações (4.7).

Considere-se novamente a equação adimensionalizada com referência à frequência da esteira, que representa o oscilador-fluido (3.23):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q = f(t)$$

Determinemos a relação entre as amplitudes das respostas da esteira  $q = q_0 \cos(\omega t)$  e da estrutura  $y = y_0 \cos(\omega t)$ . Utilizemos, para excitar a esteira, uma combinação linear de forças harmónicas com origem no deslocamento da estrutura,  $y = y_0 \cos(\omega t - \alpha)$ , que apresenta uma diferença de fase  $\alpha$  relativamente à oscilação  $q$  do fluido:

$$f(t) = -Ay_0\omega^2 \cos(\omega t - \alpha) - By_0\omega \sin(\omega t - \alpha) + Cy_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad (4.1)$$

Os termos de  $f$  são proporcionais ao deslocamento, à velocidade e à aceleração da estrutura, representando  $A$ ,  $B$  e  $C$ , coeficientes a determinar.

Substituindo no oscilador fluido (3.23),  $q$  por  $q = q_0 \cos(\omega t)$  e  $f(t)$  por (4.1), obtêm-se, após algumas simplificações, as duas equações do oscilador fluido:

$$(C - A\omega^2) \cos \alpha + B\omega \sin \alpha = \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \quad (4.2)$$

$$(C - A\omega^2) \sin \alpha - B\omega \cos \alpha = \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \quad (4.3)$$

Observe-se agora a equação adimensional com referência à esteira, que representa o oscilador estrutura (3.19):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + \delta^2 y = Mq$$

com  $\lambda = 2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu}$ .

Substituindo no oscilador estrutura,  $y$  por  $y = y_0 \cos(\omega t - \alpha)$  e  $q$  por  $q = q_0 \cos(\omega t)$ . Obtêm-se as duas equações do oscilador estrutura:



$$(\delta^2 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda \omega \sin \alpha = M \frac{q_0}{y_0}, \quad (4.4)$$

$$(\delta^2 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha = 0 \quad (4.5)$$

Para o oscilador acoplado, tem-se assim 4 equações, duas referentes ao fluido e duas referentes à esteira:

$$\begin{cases} (C - A\omega^2) \cos \alpha + B\omega \sin \alpha = \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \\ (C - A\omega^2) \sin \alpha - B\omega \cos \alpha = \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \\ (\delta^2 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda \omega \sin \alpha = M \frac{q_0}{y_0} \\ (\delta^2 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Apresentam-se de seguida 4 equações equivalentes a (4.6) e que, por serem mais simples, são as que utilizaremos na formulação do problema de otimização.

$$\begin{cases} \sin \alpha = \lambda \frac{y_0}{M q_0} \omega \\ \cos \alpha = \frac{y_0}{M q_0} (\delta^2 - \omega^2) \\ (1 - \omega^2) \cos \alpha + \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \sin \alpha = \frac{y_0}{q_0} (A - C\omega^2) \\ (1 - \omega^2) \sin \alpha - \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \cos \alpha = B \frac{y_0}{q_0} \omega \end{cases} \quad (4.7)$$

Detalhes explicativos e simplificações podem ser consultados nos apêndices (D.1 e E.1).

Os parâmetros a determinar neste oscilador acoplado, nomeadamente, os coeficientes de cada acoplamento ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), o coeficiente de acoplamento  $M$  da variável de esteira  $q$  e o parâmetro de Van der Pol  $\varepsilon$ , serão determinados recorrendo ao método *Simulated Annealing* (Simulação de Recozimento), descrito no capítulo dos Fundamentos teóricos.

#### 4.1.1 Resposta da esteira forçada harmonicamente

Também Facchinetti adotou uma metodologia de balanço harmónico para estudar os acoplamentos associados à excitação da esteira em aceleração, velocidade e deslocamento. Foi a partir desta metodologia que determinou as curvas  $K$  para cada um dos acoplamentos referidos, consultar Figura 3 de (Facchinetti et al., 2004). Por forma a estudar o balanço harmónico, seguiu-se o mesmo raciocínio que Facchinetti, chegando-se à Figura 4.1, que ilustra o conceito acabado de descrever.

Considere-se um movimento harmónico de amplitude adimensional  $y_0$  e de frequência angular  $\omega$ , nomeadamente  $y = y_0 \cos(\omega t)$ . A esteira oscilante vai ser forçada por  $f$  que, de acordo com o acoplamento escolhido vem:  $f = -A\omega^2 y_0 \cos(\omega t)$ ,  $f = -A\omega y_0 \sin(\omega t)$  e  $f = Ay_0 \cos(\omega t)$ , para o acoplamento em aceleração, velocidade e deslocamento, respetivamente.

O objetivo nesta secção é relacionar a amplitude da esteira ( $q_0$ ) com a amplitude da excitação ( $\|f\|$ ), tendo em conta que em *lock-in* existe sincronização harmónica e frequencial. Assim, a resposta da esteira é da forma  $q = q_0 \cos(\omega t + \phi)$ , onde  $q_0$  é a amplitude e  $\phi$  a fase, ambas independentes do tempo.

Substituindo  $q$  por  $q_0 \cos(\omega t + \phi)$ , na Equação (3.23):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q = f$$

Obtém-se:

$$\frac{\|f\|}{q_0} = \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \left(\varepsilon\omega - \frac{1}{4}\varepsilon\omega q_0^2\right)^2} \quad (4.8)$$

De onde se conclui que  $q_0$  é solução do polinómio bicúbico:

$$\left(\frac{\|f\|}{\varepsilon\omega}\right)^2 16 = q_0^6 - 8q_0^4 + 16 \left[1 + \left(\frac{1 - \omega^2}{\varepsilon\omega}\right)^2\right] q_0^2 \quad (4.9)$$

A partir deste polinómio é possível relacionar a amplitude harmónica ( $y_0$ ) com a frequência de excitação da resposta ( $\omega$ ). Para isso, considera-se um coeficiente de amplificação da força de sustentação com valor unitário ( $K = 1$ ) que corresponde a  $q_0 = 2$ , cujo objetivo é representar o *lock-in*. Esta relação é feita para cada um dos acoplamentos.

Tendo em vista assegurar a comparabilidade com (Facchinetti et al., 2004) adotou-se  $A = 12$  e  $\varepsilon = 0.3$ . A relação  $(y_0, U_r)$  está representada na Figura 4.1.

A figura representa a esteira e a resposta da estrutura forçadas harmonicamente, o que constitui um exemplo da metodologia de balanço harmónico. Pode verificar-se que os resultados obtidos, coincidem com os apresentados em (Facchinetti et al., 2004). É também possível observar os domínios de *lock-in* para cada um dos acoplamentos e concluir que a diferença no comportamento dinâmico de cada acoplamento se deve ao fator  $\omega$  em  $\|f\|$ . Podemos também verificar que os valores adotados para  $A$  e  $\varepsilon$  se adequam aos três acoplamentos.

Os detalhes explicativos, podem ser consultados no apêndice C.1.

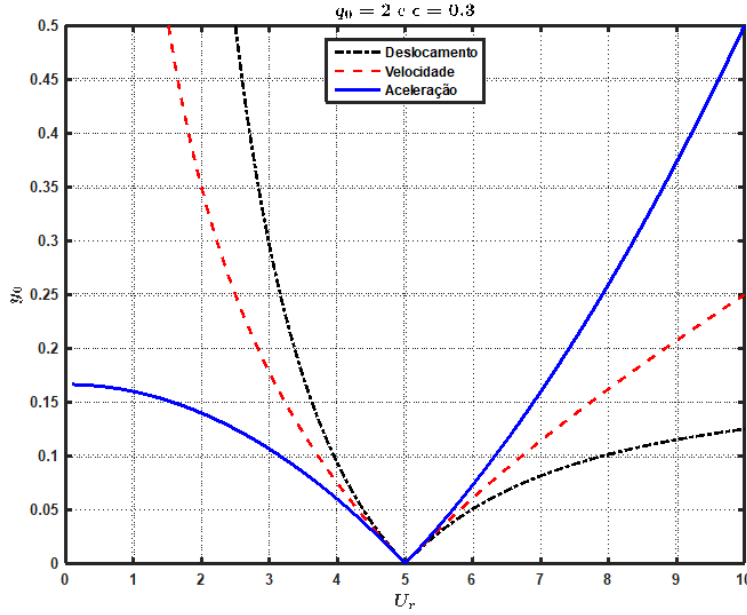


Figura 4.1: Relação entre amplitude harmônica  $y_0$  e frequência  $Ur$  da resposta.

## 4.2 Formulação do problema de otimização

Observando as duas primeiras Equações de (4.7) conclui-se que o único parâmetro suscetível de ser ajustado nessas equações, é  $M$ , fazendo com que o seu ajuste seja implementado *independentemente* do ajuste dos restantes parâmetros. Verifica-se um claro desacoplamento entre as duas primeiras equações (que podem ser utilizadas para determinar  $M$ ) relativamente às duas últimas (para a determinação de  $A, B, C, \varepsilon$ ).

Considerando as 4 equações, os 5 parâmetros a ajustar ( $A, B, C, M, \varepsilon$ ) e os parâmetros reais adimensionais ( $q_0, y_0, \alpha, \omega$ ) retirados dos dados experimentais (Belloli et al., 2015), o problema de otimização tem a seguinte formulação:

$$0 = \Delta_1 \left( \overbrace{M}^{\text{Parâmetros a ajustar}} ; \overbrace{q_0, y_0, \alpha, \omega}^{\text{Parâmetros reais adim.}} \right) = M q_0 \sin \alpha - y_0 \lambda \omega \quad (4.10)$$

$$0 = \Delta_2 (M; q_0, y_0, \alpha, \omega) = M q_0 \cos \alpha - y_0 (\delta^2 - \omega^2) \quad (4.11)$$

$$0 = \Delta_3 (A, B, C, \varepsilon; q_0, y_0, \alpha, \omega) \quad (4.12)$$

$$= q_0 \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \sin \alpha + q_0 (1 - \omega^2) \cos \alpha - y_0 (A - C \omega^2)$$

$$0 = \Delta_4 (A, B, C, \varepsilon; q_0, y_0, \alpha, \omega) \quad (4.13)$$

$$= q_0 (1 - \omega^2) \sin \alpha - q_0 \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \cos \alpha - y_0 B \omega$$

Os detalhes de formulação que permitiram chegar às equações estabelecidas, encontram-se no apêndice (E.1).

Tendo em conta estas equações estabelecidas, de seguida, formula-se a metodologia para proceder ao ajuste tendo por base dados experimentais.

Definiram-se dois funcionais a minimizar, um para determinar  $M$  e outro para determinar  $(A, B, C, \varepsilon)$ .

Relativamente a (4.10 e 4.11):

$$0 = \Delta_1 \left( \overbrace{M}^{\text{Parâmetros a ajustar}} ; \overbrace{q_0, y_0, \alpha, \omega}^{\text{Parâmetros reais adim.}} \right) = M q_0 \sin \alpha - y_0 \lambda \omega$$

$$0 = \Delta_2 (M; q_0, y_0, \alpha, \omega) = M q_0 \cos \alpha - y_0 (\delta^2 - \omega^2)$$

o ajuste de  $M$  pode ser feito minimizando o seguinte funcional:

$$E(M) = \sum_{i=1}^m (\Delta_1^2(M; P_i) + \Delta_2^2(M; P_i)) \quad (4.14)$$

em que  $P_i$  representa a sequência de parâmetros experimentais e  $m$  o número de dados.

$$\text{com } P_i = (q_0, y_0, \alpha, \omega)_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Em (Facchinetti et al., 2004), refere-se que o valor de  $M$  pode ser interpretado como (3.21):

$$M = \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_T^2 \mu}$$

terá interesse comparar esta interpretação com o valor de  $M$  que obtivermos por ajuste.

Relativamente a (4.12 e 4.13):

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_3(A, B, C, \varepsilon; q_0, y_0, \alpha, \omega) \\ &= q_0 \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \sin \alpha + q_0(1 - \omega^2) \cos \alpha - y_0(C - A\omega^2) \\ 0 &= \Delta_4(A, B, C, \varepsilon; q_0, y_0, \alpha, \omega) \\ &= q_0(1 - \omega^2) \sin \alpha - q_0 \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \cos \alpha - y_0 B \omega \end{aligned}$$

o ajuste dos restantes parâmetros poderá ser implementado minimizando o funcional:

$$E(A, B, C, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m (\Delta_3^2(A, B, C, \varepsilon; P_i) + \Delta_4^2(A, B, C, \varepsilon; P_i)) \quad (4.15)$$

em que  $P_i$  representa a sequência de parâmetros experimentais e  $m$  o número de dados.

$$P_i = (q_0, y_0, \alpha, \omega)_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

O ajuste de curvas e calibração dos parâmetros a determinar, será feito recorrendo à técnica heurística conhecida por Simulação de Recozimento. Tal como referido nos Fundamentos Teóricos, esta técnica de otimização, tem como propósito encontrar uma solução que permita minimizar a função objetivo. Uma vez que as funções objetivo a minimizar (4.14 e 4.15) são não lineares e o espaço de pesquisa é multidimensional, justifica-se a escolha de uma abordagem heurística. Além disso, o método de Simulação de Recozimento é de simples programação (Press et al., 2007).

### 4.3 Estabelecimento do algoritmo de otimização

O algoritmo de otimização que implementa o método de simulação de recozimento, foi desenvolvido em MATLAB e permite ajustar as equações encontradas aos dados experimentais, para obter os parâmetros desconhecidos.

No programa principal invocam-se os dados experimentais, definem-se os restantes parâmetros necessários, escolhe-se a configuração que se pretende testar ( $Sc = 0.50$ ,  $Sc = 2.18$  ou  $Sc = 3.60$ ), convertem-se os valores experimentais (de acordo com a Tabela 4.5) e formulam-se as adimensionalizações

necessárias. Define-se, ainda, o universo inicial de parâmetros que vai ser perturbado após cada avaliação da função objetivo.

Posteriormente, inicia-se o método de Simulação de Recozimento. Para isso, constroem-se as matrizes  $\Delta_n$  cujas entradas  $(i, j)$  satisfazem para uma sequência de dados experimentais  $(q_0, y_0, \alpha, \omega)_i$ , uma sequência de parâmetros de ajuste  $(A, B, C, \varepsilon)_j$  ou  $(M)_j$ . Tem-se duas matrizes  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , que representam (4.10 e 4.11) e duas matrizes  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$ , correspondentes a (4.12 e 4.13). Ao calcular o somatório dos quadrados de cada um das  $\Delta_n$ , estamos a calcular o erro associado a cada aproximação dos parâmetros de ajuste aos dados experimentais. Os representantes das melhores aproximações são guardados para, numa nova corrida, a partir deles, se gerarem novos representantes, com erros cada vez menores. De seguida, calculam-se novamente as matrizes  $\Delta_n$  e respetivo somatório dos quadrados de cada uma delas, desta vez, para os representantes perturbados. No final, cria-se um vetor que representa o melhor representante e a respetiva configuração de  $(M)$  e de  $(A, B, C, \varepsilon)$ .

## 4.4 Calibração dos parâmetros

Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 podemos encontrar transcritos os dados experimentais extraídos de (Belloli et al., 2015) que serão usados no processo de ajuste/calibração. Os dados dizem respeito à amplitude adimensional ( $z/D$ ), amplitude da força de sustentação ( $C_L$ ), rácio de frequência ( $f^*$ ) e fase ( $\alpha$ ) em função da velocidade normalizada ( $U^*$ ) e encontram-se adimensionalizados.

Uma vez que a adimensionalização feita por Belloli, não coincide com a adimensionalização seguida nesta dissertação, na Tabela 4.5 apresenta-se a conversão dos dados. Cada tabela está associada a um número de Scruton ( $Sc$ ), a Tabela 4.1 corresponde a  $Sc = 0.50$ , a Tabela 4.2 corresponde a  $Sc = 2.18$  e a Tabela 4.3 corresponde a  $Sc = 3.60$ .

O número de Scruton pode ser visto como uma medida de amortecimento estrutural, veja-se a Equação (2.25). Assim, um número de Scruton menor (0.50) corresponde a um grau de amortecimento reduzido, em que as respostas vibratórias são mais exuberantes e um número de Scruton maior (3.60) corresponde a um grau de amortecimento elevado em que o comportamento vibratório é menos exuberante.

$[U^*]$	$[z/D]$	$[C_L]$	$[f^*]$	$[\alpha]$
0.89	0.05	0.10	0.99	0
0.91	0.03	0.08	0.98	20
0.93	0.04	0.50	0.94	5
0.95	0.05	0.35	0.96	15
0.97	0.07	0.90	0.97	10
0.99	0.08	0.90	0.97	5
1.02	0.10	0.75	0.98	0
1.04	0.15	1.40	0.98	5
1.06	0.17	1.90	0.98	10
1.09	0.20	2.00	0.98	5
1.11	0.27	2.25	0.98	5
1.14	0.57	3.20	0.99	10
1.16	0.60	3.40	0.99	10
1.18	0.65	3.60	0.99	10
1.23	0.78	4.00	1.01	12
1.26	0.90	4.20	1.02	20
1.28	1.10	3.75	1.03	25
1.32	0.18	0.10	0.98	140
1.33	0.15	0.09	0.98	137
1.35	0.13	0.09	0.98	135
1.37	0.10	0.09	0.98	125
1.40	0.05	0.07	0.98	120

Tabela 4.1: Dados experimentais referentes a  $Sc = 0.50$ .

$[U^*]$	$[z/D]$	$[C_L]$	$[f^*]$	$[\alpha]$
0.93	0.04	0.09	0.99	25
0.95	0.05	0.50	0.96	-5
0.97	0.07	0.35	0.97	15
1.01	0.09	0.85	0.97	10
1.03	0.10	1.25	0.97	10
1.05	0.12	0.85	0.97	30
1.07	0.15	1.60	0.98	5
1.08	0.17	1.30	0.98	10
1.09	0.18	1.40	0.98	15
1.12	0.20	1.50	0.98	20
1.14	0.23	1.65	0.98	15
1.16	0.27	1.80	0.99	17
1.19	0.48	2.40	0.99	20
1.22	0.55	2.60	0.99	25
1.24	0.60	2.80	1.00	25
1.27	0.68	3.00	1.00	25
1.29	0.06	0.09	0.99	125
1.31	0.05	0.09	0.99	65
1.33	0.04	0.09	0.98	65

Tabela 4.2: Dados experimentais referentes a  $Sc = 2.18$ .

$[U^*]$	$[z/D]$	$[C_L]$	$[f^*]$	$[\alpha]$
0.94	0.04	0.35	0.94	10
0.96	0.05	0.40	0.96	0
0.98	0.07	0.75	0.96	0
1.01	0.09	0.85	0.97	25
1.03	0.10	0.75	0.97	40
1.06	0.12	0.85	0.98	25
1.08	0.14	0.80	0.98	40
1.11	0.16	0.35	0.98	55
1.13	0.18	0.75	0.98	55
1.15	0.12	0.20	0.99	105
1.17	0.10	0.19	0.98	115
1.18	0.08	0.17	0.98	95
1.21	0.07	0.15	0.99	120
1.24	0.05	0.13	0.99	65
1.26	0.04	0.10	0.99	215
1.30	0.04	0.09	1.00	165

Tabela 4.3: Dados experimentais referentes a  $Sc = 3.60$ .

Relativamente aos parâmetros a ajustar, respetivos intervalos de variação e resoluções, veja-se a Tabela (4.4).

Significado	Símbolo	Intervalo de variação	Resolução
Coef. acoplamento $y$	$C$	$[0, 20]$	4
Coef. acoplamento $\dot{y}$	$B$	$[0, 20]$	4
Coef. acoplamento $\ddot{y}$	$A$	$[0, 20]$	4
Coef. acoplamento $q$	$M$	$[0, 15]$	0.5
Parâmetro Van der Pol	$\varepsilon$	$[0, 2]$	0.4

Tabela 4.4: Parâmetros a ajustar.

No processo de otimização escolheram-se 20.000 épocas e em cada uma delas, guardam-se os 20 melhores resultados.

Os parâmetros reais adimensionalizados por Belloli são:  $q_0, y_0, \alpha, \omega$ , estes necessitam de ser convertidos para a nossa formulação (adimensionalização referida à frequência da esteira), veja-se a Tabela 4.5.



Parâmetro	Símbolo	Relação com parâmetro físico
$q_0$	Amplitude adim. esteira	$q = 2C_L/C_{L_0}$ , $C_{L_0} \approx 0.3$ (*)
$y_0$	Amplitude adim. cilindro	$z/D = yD$
$\alpha$	Diferença de fase cilindro-esteira	$\alpha$
$\omega$	Frequência estrutura/esteira adim	$\omega = \frac{f^*}{\Omega_{s_T}}$ , $\Omega_{s_T} = S_T \frac{U}{D}$ (**)
$U_r$	Velocidade reduzida	$U^* = U_r S_T$

Tabela 4.5: Parâmetros reais adimensionalizados.

(\*)  $C_{L_0} \approx 0.3$  Num extenso intervalo de variação de  $Re$  (Blevins, 1990); (Pantazopoulos, 1994).  $C_L$  – Coeficiente de sustentação dinâmico (flutuante),  $F_L = \frac{1}{2}\rho U^2 D L C_L$ .

(\*\*) Número de Strouhal  $S_T \approx 0.18$  (Belloli et al., 2015) para um regime sub-crítico,  $300 < Re = \frac{DU}{\nu} < 1.5 \times 10^5$ .

Através das constantes conhecidas (estas podem ser consultadas no apêndice (E.2)), podemos ajustar estes dados à realidade do nosso problema.

## 4.5 Resultados obtidos

Apresentam-se de seguida os resultados do programa de ajuste de parâmetros, em que  $M$  foi ajustado de forma independente dos restantes parâmetros. As seguintes tabelas mostram o ajuste dos dados correspondentes a cada um dos números de Scruton, onde Desemp.  $M$  e Desemp.  $A, B, C, \varepsilon$  representam o desempenho do termo ajustado associado ao ajuste de  $M$  e de  $A, B, C, \varepsilon$ , respetivamente. Este valor é uma forma de avaliar o erro associado ao ajuste dos parâmetros em questão.

Os resultados obtidos para o ajuste dos parâmetros, para  $Sc = 0.50$ , encontram-se na Tabela 4.6, para  $Sc = 2.18$ , na Tabela 4.7 e para  $Sc = 3.60$ , na Tabela 4.8.

Desemp. $M$	Desemp. $A, B, C, \varepsilon$	$C$	$B$	$A$	$\varepsilon$	$M$
337.533383	22.285386	-0.688940	3.887878	-14.104726	0.000152	0.729915

Tabela 4.6: Resultados alcançados para  $Sc = 0.50$ .

Desemp. $M$	Desemp. $A, B, C, \varepsilon$	$C$	$B$	$A$	$\varepsilon$	$M$
190.062506	3.321896	18.866771	1.401553	11.418080	-0.001723	0.679460

Tabela 4.7: Resultados alcançados para  $Sc = 2.18$ .

BF $M$	BF $A, B, C, \varepsilon$	$C$	$B$	$A$	$\varepsilon$	$M$
98.443087	1.052537	-10.172677	5.003200	-15.317062	0.009016	0.585747

Tabela 4.8: Resultados alcançados para  $Sc = 3.60$ .

Tal como se tinha proposto, procedeu-se também ao cálculo de  $M$  de forma analítica, baseado na Expressão (3.21). Desta forma, é possível comparar o valor de  $M$  obtido através do programa de ajuste com o valor interpretado por Facchinetti e averiguar se os resultados são favoráveis.

O valor de  $M$  calculado analiticamente é  $4.3942 \times 10^{-4}$ , este valor é substancialmente mais pequeno que qualquer valor de  $M$  calculado por ajuste.

Pode verificar-se que o ajuste dos parâmetros associados a  $Sc = 3.60$  é o que tem melhor desempenho, basta observar os valores de desempenho para o ajuste de  $M$  (98.443087) e para o ajuste de  $A, B, C, \varepsilon$  (1.052537). Ao comparar estes valores com os associados a  $Sc = 0.50$  e  $Sc = 2.18$ , verifica-se que, para  $Sc = 3.60$ , são substancialmente mais pequenos, o que representa um erro de ajuste menor.

No entanto, é de referir que estas dissemelhanças entre os valores obtidos, para os diferentes números de Scruton, não são promissoras, pois o ajuste deveria ser praticamente independente da geometria/estrutura, uma vez que se está a trabalhar com um sistema adimensionalizado.

Pode ainda constatar-se que os resultados relativos a  $Sc = 2.18$  não são adequados uma vez que o valor de  $\varepsilon$  é menor que zero, o que não tem sentido físico.

Apresentam-se ainda os gráficos representativos da evolução do desempenho em cada época, para  $Sc = 0.50$ . A Figura 4.2 representa, para  $Sc = 0.50$ , a evolução do desempenho associado à calibração de  $M$  e a Figura 4.3 representa a evolução do desempenho associado à calibração de  $A, B, C, \varepsilon$ .

Pelos gráficos acima apresentados, observa-se que o desempenho está a evoluir no sentido esperado, ou seja, o erro associado ao ajuste diminui com as épocas, acabando por estabilizar. Esta é uma evidência de que, de época para época, os valores obtidos representam configurações dos parâmetros cada vez mais adequados, acabando os seus valores por estabilizar. Para os restantes  $Sc$ , a evolução do desempenho dá-se no mesmo sentido.

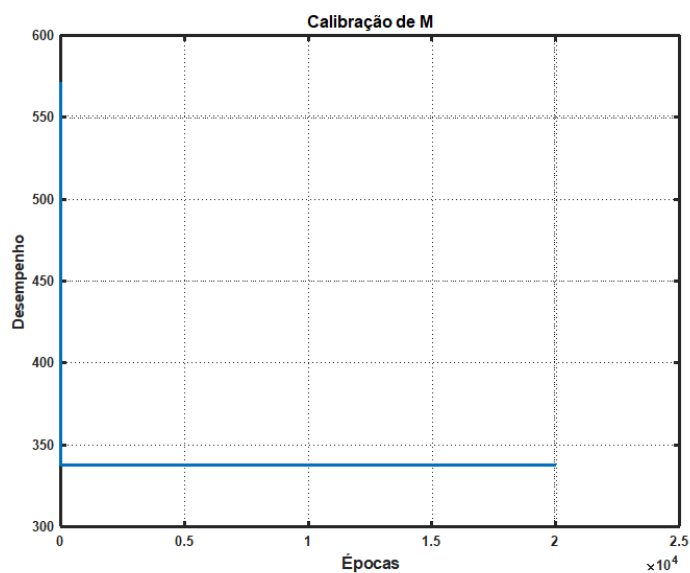


Figura 4.2: Evolução da calibração de  $M$ , para  $Sc = 0.50$ .

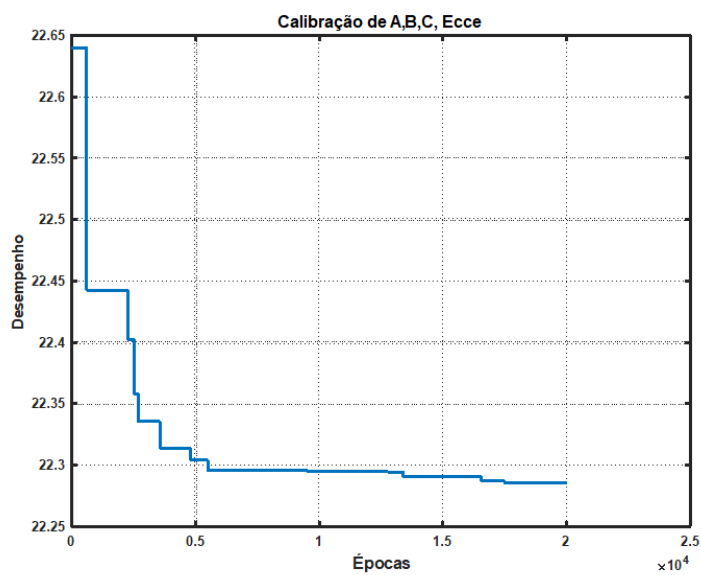


Figura 4.3: Evolução da calibração de  $A, B, C, \varepsilon$ , para  $Sc = 0.50$ .

## 4.6 Estudo numérico do acoplamento combinado

Apresentam-se, nesta secção, as simulações numéricas desenvolvidas tendo por base os parâmetros calibrados através do programa de ajuste anteriormente implementado. Para o acoplamento combinado, com base nas simulações numéricas realizadas, será feita uma análise das respostas vibratórias da estrutura e da esteira antes, durante e depois do *lock-in*.

O programa de ajuste foi implementado para os 3 conjuntos de dados de Belloli, cada um associado a um número de Scruton, no entanto, uma vez que os resultados para  $Sc = 2.18$  são desadequados ( $\varepsilon < 0$ ), nas simulações numéricas apresentaremos apenas os resultados relativos a  $Sc = 0.50$  e  $Sc = 3.60$ .

Na Tabela 4.9 apresentam-se os valores geométricos e físicos adotados nas simulações numéricas, utilizando as unidades SI, comuns a todos os números de Scruton. Na Tabela 4.10 apresentam-se os valores físicos que variam de acordo com o número de Scruton.

$D$ [m]	$m_S$ [kg/m]	$S_T$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$C_M$	$C_{L0}$
0.2	6.5	0.18	1225	1	0.3

Tabela 4.9: Principais parâmetros geométricos e físicos, para qualquer  $Sc$ .

	$C_D$	$\xi$
$Sc = 0.50$	3.8	0.0006
$Sc = 3.60$	1.7	0.0041

Tabela 4.10: Parâmetros físicos para  $Sc = 0.50$ ,  $Sc = 3.60$ .

Para estas simulações construíram-se três programas em MATLAB:

- O programa (*womf\_combinado.m*) define o sistema de equações representativo do acoplamento combinado, com referência à frequência da esteira.
- O programa (*mainwomf\_combinado.m*), permite escolher o número de Scruton, define os parâmetros a utilizar, resolve o sistema de equações (através da rotina *ode45* do MATLAB) e guarda a informação num ficheiro *.mat*.
- O programa (*pos\_womf\_combinado.m*) carrega o ficheiro *.mat* e faz o processamento dos dados.

Com base nas simulações numéricas realizadas, as respostas vibratórias da estrutura e esteira antes, durante e no pós *lock-in*, são apresentadas e discutidas. Os resultados das simulações feitas com base na combinação otimizada dos acoplamentos, serão comparados com os valores dos dados experimentais que se encontram na Figura 11 do trabalho de Belloli, (Belloli et al., 2015).

Para cada  $Sc$ , com base em todos parâmetros calculados pelo programa de ajuste (inseridos nas Tabelas 4.6 e 4.8), escolheu-se um ciclo de velocidades que permite analisar as respostas antes ( $U_r < 5$ ), durante ( $U_r \approx 5$ ) e no pós *lock-in* ( $U_r > 5$ ). Uma vez que o valor ajustado para  $M$  é bastante diferente do seu valor real ( $4.3942 \times 10^{-4}$ ), também se reproduziram as simulações com este parâmetro calculado analiticamente e com os restantes calculados por ajuste.

Mostram-se, de seguida, através de tabelas os resultados das simulações numéricas. Cada tabela corresponde a um número de  $Sc$  e mostra as amplitudes de oscilação mínima e máxima da estrutura ( $y$ ) e da esteira ( $q$ ), para o espectro de *lock-in*.

Para,  $Sc = 0.50$  e  $Sc = 3.60$  e com todos os parâmetros ( $A, B, C, \varepsilon, M$ ) calculados pelo programa de ajuste, vejam-se as Tabelas 4.11 e 4.12.

$Sc = 0.50$	$y \min$	$y \max$	$q \min$	$q \max$
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^5$	$1 \times 10^5$	-2000	2000
$U_r = 5.6$	$-2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	-4000	4000
$U_r = 6.9$	$-4 \times 10^5$	$4 \times 10^5$	-5000	5000

Tabela 4.11: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com  $M$  ajustado, para  $Sc = 0.50$ .

$Sc = 3.60$	$y \min$	$y \max$	$q \min$	$q \max$
$U_r = 4.2$	-100	100	-50	50
$U_r = 5.6$	$-1 \times 10^4$	$1 \times 10^4$	-300	300
$U_r = 6.9$	$-2 \times 10^4$	$2 \times 10^4$	-500	500

Tabela 4.12: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com  $M$  ajustado, para  $Sc = 3.60$ .

Para  $Sc = 0.50$  e  $Sc = 3.60$ , apenas com ( $A, B, C, \varepsilon$ ) calculados pelo programa de ajuste e  $M$  calculado analiticamente, vejam-se as Tabelas 4.13 e 4.14.

Vejam-se também, para  $Sc = 0.50$  e  $Sc = 3.60$  e com todos os parâmetros ( $A, B, C, \varepsilon, M$ ) calculados pelo programa de ajuste, os Gráficos 4.4 e 4.5, que mostram a resposta temporal da estrutura e da esteira em *lock-in*.

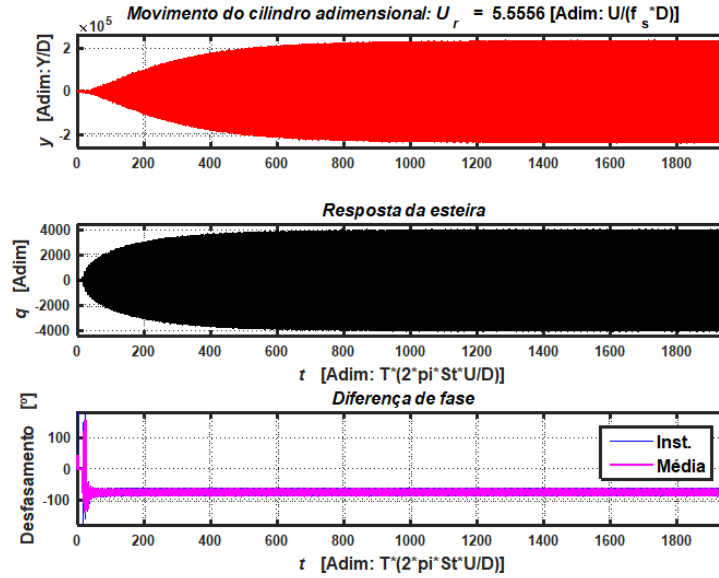


Figura 4.4: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 0.50$ , com  $M$  ajustado - acoplamento combinado.

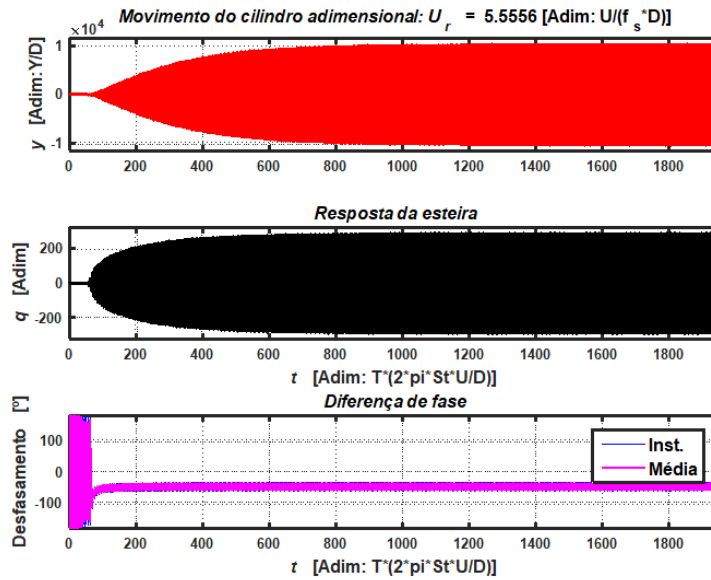


Figura 4.5: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 3.60$ , com  $M$  ajustado - acoplamento combinado.

$Sc = 0.50$	$y \text{ min}$	$y \text{ max}$	$q \text{ min}$	$q \text{ max}$
$U_r = 4.2$	$-5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	-5	5
$U_r = 5.6$	-3	3	-100	100
$U_r = 6.9$	$-1 \times 10^{-6}$	$-1 \times 10^{-6}$	$-5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$

Tabela 4.13: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com  $M$  analítico, para  $Sc = 0.50$ .

$Sc = 3.60$	$y \text{ min}$	$y \text{ max}$	$q \text{ min}$	$q \text{ max}$
$U_r = 4.2$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-2	2
$U_r = 5.6$	-0.2	0.2	-7	7
$U_r = 6.9$	$-1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	-1	1

Tabela 4.14: Amplitudes de oscilação da esteira e da estrutura, com  $M$  analítico, para  $Sc = 3.60$ .

Vejam-se também, para  $Sc = 0.50$  e  $Sc = 3.60$  e apenas com os parâmetros  $(A, B, C, \varepsilon)$  calculados pelo programa de ajuste e  $M$  calculado analiticamente, os Gráficos 4.6 e 4.7, que mostram a resposta temporal da estrutura e da esteira em *lock-in*.

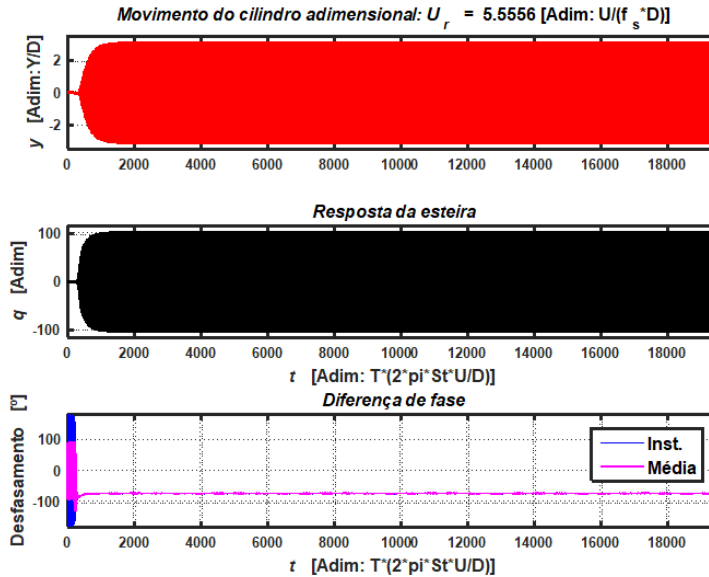


Figura 4.6: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 0.50$ , com  $M$  analítico - acoplamento combinado

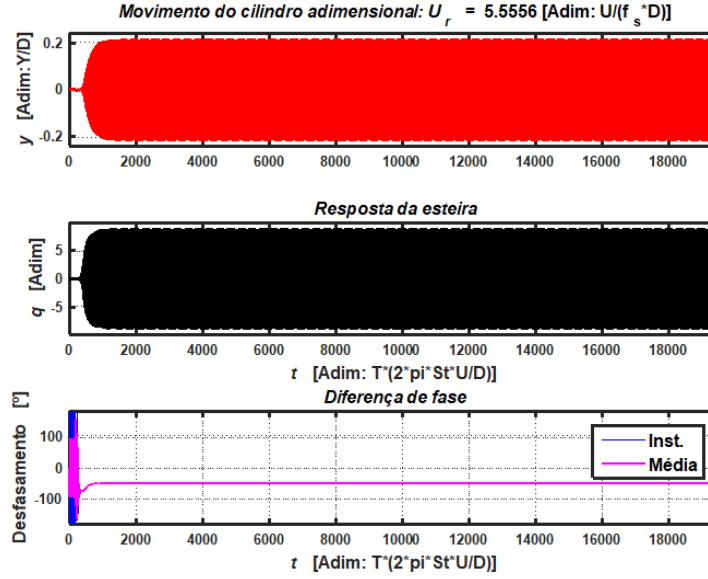


Figura 4.7: Resposta temporal, em *lock-in*, para  $Sc = 3.60$ , com  $M$  analítico - acoplamento combinado

Ao observar os gráficos da Figura 11 de (Belloli et al., 2015), verifica-se que, em *lock-in*, os parâmetros  $z/D$  (correspondente a  $y$ , neste trabalho) e  $C_L(q)$ , em *lock-in* ( $U/U_{sT}$ ), têm o valor de, aproximadamente, 0.1 e 0.75, respetivamente. Ao fazer a comparação com os resultados das nossas simulações numéricas, verifica-se que a situação em que se obtém melhores resultados é para  $Sc = 3.60$ , com  $M$  analítico, em que  $y$  e  $q$ , assumem os valores de, aproximadamente, 0.2 e 7, respetivamente. Esta observação pode prender-se com o facto de  $Sc = 3.60$  corresponder a um comportamento vibratório menos exuberante.

## 4.7 Conclusões

Relativamente ao estudo do acoplamento combinado, pode verificar-se que, para qualquer um dos números de Scruton, os resultados do programa de ajuste não parecem refletir adequadamente a realidade. Obtiveram-se valores de desempenho elevados, o que indica que o ajuste dos parâmetros não se efetivou como seria de esperar. Ainda assim, os resultados obtidos para  $Sc = 3.60$  são melhores do que para  $Sc = 0.50$  ou  $Sc = 2.18$ .

As simulações numéricas permitiram comparar os resultados obtidos por



calibração com os dados obtidos experimentalmente, nomeadamente através dos valores de  $z/D$  e  $C_L$ , retirados de (Belloli et al., 2015). Verificou-se, mais uma vez, que a situação em que se obtém melhores resultados é para  $Sc = 3.60$ .

Uma vez que as simulações numéricas realizadas mostram diferenças consideráveis no comportamento oscilatório da estrutura e da esteira, para os diferentes números de Scruton, podemos concluir que a formulação do acoplamento combinado é muito dependente da geometria e física de cada problema. Por este motivo, esta formulação carece de generalidade de aplicação, tornando-se muito específica e, portanto, com espectro de utilidade pequeno.

Pode também constatar-se que o acoplamento combinado ainda carece de uma análise profunda, bem como de ajustes e verificações. Este modelo e a escolha da combinação de parâmetros ainda não se encontram completamente consolidados.



# Capítulo 5

## Conclusões e trabalho futuro

### 5.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho consistiu no estudo dos modelos de esteira oscilante. Para isso, estudaram-se e analisaram-se abordagens clássicas já existentes (acoplamentos isolados) e ensaiaram-se novas abordagens para formular estes modelos (acoplamento combinado).

É importante referir que os modelos de esteira oscilante são puramente fenomenológicos descrevendo essencialmente, qualitativamente, o fenómeno modelado. Ainda assim, conseguem descrever satisfatoriamente o comportamento qualitativo do fenómeno de *lock – in*. Podem ainda ser, facilmente, aplicados a 2 e 3 dimensões, constituindo uma ferramenta adequada à compreensão deste fenómeno.

Ao estudar cada acoplamento isoladamente (aceleração, velocidade e deslocamento), concluiu-se que qualquer um dos acoplamentos se adapta bem à realidade dos dados experimentais.

Os resultados obtidos no estudo numérico do acoplamento em aceleração e os resultados provenientes da sua aplicação aos dados experimentais de Belloli, foram ambos satisfatórios. Reforçou-se, assim, a ideia, presente na literatura, de que o acoplamento em aceleração é o mais adequado a modelar o comportamento vibratório do sistema estrutura/esteira.

Conclui-se, ainda, que o acoplamento em aceleração é o mais eficaz na excitação de sistemas a frequências elevadas e que o acoplamento em deslocamento tem a propriedade contrária.

Não obstante, com o estudo de cada acoplamento isoladamente e comparação dos resultados com a literatura já existente, verificou-se que os vários acoplamentos exibiam diferenças de comportamento qualitativo. Este facto levou a ensaiar a utilização de combinações lineares de coeficientes de acopla-

mento  $A, B, C$ , tendo em vista procurar reproduzir melhor o comportamento qualitativo/quantitativo dos sistemas reais.

Para testar o acoplamento combinado, recorreu-se a dados experimentais presentes na literatura. Os resultados obtidos através de metodologia de ajuste, baseados nesses dados, não se revelaram satisfatórios, tornando o estudo insuficientemente esclarecedor.

A falta de rigor verificada na obtenção e utilização dos dados, pode explicar parcialmente as dificuldades verificadas. A validação do conceito de acoplamento combinado exige a utilização de dados rigorosos, o que não foi possível obter em tempo útil.

Além disso, verificou-se que a abordagem ao acoplamento combinado estava muito dependente das condições físicas e geométricas do problema. Este facto leva a admitir esta formulação pouco generalizada, diminuindo a sua utilidade. Pelo contrário, a utilização de um acoplamento isolado, apesar de não permitir um ajuste tão bom, confere generalidade ao modelo.

Pode, por fim, concluir-se que o modelo de acoplamento combinado, a metodologia de ajuste e de escolha da combinação de parâmetros, ainda carecem de verificação e análise profunda.

## 5.2 Trabalho Futuro

Com o objetivo de continuar a desenvolver o estudo dos modelos de esteira oscilante, propõe-se os seguintes possíveis passos:

- Reverificar o conceito de acoplamento combinado e respetiva abordagem, com dados experimentais suficientemente rigorosos, para a sua possível validação e publicação das conclusões;
- Formular o modelo de esteira oscilante utilizando a equação de Duffing em substituição da equação de Van der Pol;
- Estudar a inclusão de parâmetros adicionais de ajuste, por forma a ajustar melhor o modelo à realidade;
- Estudar a inclusão de uma equação adicional que acautele a variação de certos parâmetros que no atual modelo são considerados invariantes;
- Ensaiar a utilização de acoplamentos não lineares entre a estrutura e a esteira recorrendo, por exemplo a combinações não lineares do deslocamento, da velocidade e da aceleração da estrutura.

# Bibliography

Ali H. Nayfeh, B. B. (1995). *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*. Wiley Series in Nonlinear Science. Wiley-VCH.

Allan Piersol, T. P. e. (2009). *Harris' shock and vibration handbook*. McGraw-Hill Professional, 6th edition.

Almeida, C., Sacramento, M., and Moreira, M. (2018). Determinação de amplitudes e frequências oscilatórias e resolução assintótica da equação de van der pol recorrendo ao método IFOHAM. *Encontro anual da investigação e desenvolvimento em ciências militares 2018*, pages 1–13.

Axisa, F. and (Eds.), J. A. (2007). *Modelling of mechanical systems: fluid-structure interaction*, volume 3 of *Modelling of Mechanical Systems*. Elsevier, Academic Press, 1st edition.

Bayat, M., Pakar, I., and Domairry, G. (2012). Recent developments of some asymptotic methods and their applications for nonlinear vibration equations in engineering problems: a review. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1:1–93.

Belloli, M., Giappino, S., Morganti, S., Muggiasca, S., and Zasco, A. (2015). Vortex induced vibrations at high reynolds numbers on circular cylinders. *Ocean Engineering*, 94:140–154.

Billah, K. Y. and Scanlan, R. H. (1991). Resonance, Tacoma narrows bridge failure and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, 59(2):118–124.

Bishop, R. E. D. and Hassan, A. Y. (1964). The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 277(1368):32–50.

- Blevins, R. D. (1990). *Flow induced vibrations*. Krieger Publishing Co., Malabar, FL, 2nd edition.
- Chatterjee, A. (2009). A brief introduction to nonlinear vibrations. *Mechanical Engineering, Indian Institute of Science*, pages 1–20.
- Corinthios, M. J. (2007). New Laplace, z and Fourier-related transforms. In *The Royal Society*, volume 463, pages 1179–1198.
- de Langre, E. (2006). Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures*, 22:783–791.
- Facchinetti, M. L., de Langre, E., and Biolley, F. (2004). Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 19(2):123–140.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison- Wesley Professional.
- Hafeez, H. Y., Ndikilar, C. E., and Isyaku, S. (2015). Analytical study of the van der pol equation in the autonomous regime. *Progress in Physics*, 11:252–262.
- Hartlen, R. T. and Currie, I. G. (1970). Lift-oscillator model of vortex induced vibration. *Journal of the engineering mechanics division*, 96(5):577–591.
- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence*. The MIT Press.
- Iwan, W. D. and Blevins, R. D. (1974). A model for vortex-induced oscillation of structures. *Journal of applied mechanics*, 41(3):581–586.
- James, J. F. (2011). *A student’s guide to Fourier transforms with applications in physics and engineering*. Cambridge University Press, 3th edition.
- Katopodes, N. D. (2019). *Free-surface flow: environmental fluid mechanics*. Elsevier, Butterworth-Heinemann.
- Krenk, S. and Nielsen, S. R. K. (1999). Energy balanced double oscillator model for vortex-induced vibrations. *Journal of engineering mechanics*, 123(Paper 28):1–24.

- Lanczos, C. (1949). *The variational principles of mechanics*. Dover Books on Physics and Chemistry. Dover Publications, 4th edition.
- Landl, R. (1975). A mathematical model for vortex-excited vibrations of bluff bodies. *Journal of sound and vibration*, 42(2):219–234.
- Lienhard, J. H. et al. (1966). *Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders*, volume 300. Technical Extension Service, Washington State University Pullman, WA.
- Lopez, J.-L., Abbasbandy, S., and Lopez-Ruiz, R. (2009). Formulas for the amplitude of the van der pol limit cycle through the homotopy analysis method. *Scholarly Research Exchange*, 2009:1–7.
- Marris, A. W. (1964). A review on vortex streets, periodic wakes and induced vibration phenomena. *Journal of Basic Engineering*, 86(2):185–193.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21:1087.
- Michalewicz, Z. (1998). *Genetic algorithms and data structures - evolution programs*. Springer-Verlag, 3th edition.
- Nakamura, T., Kaneko, S., Inada, F., Kato, M., Ishihara, K., Nishihara, T., Mureithi, N. W., and Langthjem, M. A. (2013). *Flow-induced vibrations: classifications and lessons from practical experiences*. Butterworth-Heinemann.
- Novak, M. (1971). Galloping and vortex induced oscillations of structures. *Proceedings of the third international conference on wind effect on building and structures*.
- Pantazopoulos, M. S. (1994). *Vortex-induced vibration parameters: critical review*, volume 1 of *Offshore Technology*. The American Society of Mechanical Engineers.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes - the art of scientific computing*, volume 1. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Radhika, T. S. L. Iyengar, T. K. V. and Rani, T. R. (2015). *Approximate analytical methods for solving ordinary differential equations*. CRC Press.
- Rozov, N. K. (2011). Van der pol equation. *Encyclopedia of Mathematics*.

- Skop, R. A. and Griffin, O. M. (1973). A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders. *Journal of sound and vibration*, 27(2):225–233.
- Srinil, N. and Zanganeh, H. (2012). Modelling of coupled cross-flow/in-line vortex-induced vibrations using double duffing and van der pol oscillators. *Ocean Engineering*, 53:83–97.
- Thomsen, J. J. (2003). *Vibrations and stability: advanced theory, analysis and tools*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition.
- Timoshenko, S. P., Young, D. H., and Jr., W. W. (1974). *Vibration problems in engineering*. John Wiley and Sons, 4th edition.
- Tsatsos, M. (2006). *Theoretical and numerical study of the van der pol equation*. phdthesis, Aristotle University of Thessaloniki.
- Vladimír, G. (2012). Mechanical vibration. *Posterus*, pages 1–5.
- White, F. M. (2017). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill Education, 8th edition edition.
- William E. Boyce, R. C. D. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley, 7th edition.
- Wu, T. and Kareem, A. (2012). An overview of vortex-induced vibration (VIV) of bridge decks. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 6(4):335–347.



## **Apêndice A**

### **Modelo de esteira oscilante - adimensionalização**

## A.1 Adimensionalização referida à estrutura

Considere-se a massa  $m_S$ , o amortecimento  $r_S$  (3.4) e a rigidez do movimento do cilindro no vácuo  $h$ .

O efeito do fluido no escoamento deve ser analisado considerando, a massa de fluido acrescentada  $m_F$  (3.6) e o amortecimento de fluido acrescentado  $r_F$  (3.7):

$$m_F = \frac{1}{4}\pi\rho D^2 C_M$$

$$r_F = 2\pi \underbrace{\frac{S_T U}{D}}_{\Omega_{s_T}} \gamma \rho D^2$$

Como vimos, o coeficiente de amortecimento acrescentado pelo fluido  $\gamma$  presente em  $r_F$ , relaciona o coeficiente de arrasto  $C_D$  com o número de Strouhal (3.8):

$$\gamma = \frac{C_D}{4\pi S_T}$$

Considere-se  $Y = Y(T)$  como o movimento do cilindro, em função do tempo  $T$ , excitado pela força de sustentação (*lift force*)  $F_L = F_L(T)$  que depende do coeficiente de sustentação  $C_L = C_L(T)$ . Assumindo que a oscilação da esteira  $Q = Q(T)$  é proporcional a  $C_L$ , vem que (3.1):

$$Q(T) = \frac{2C_L(T)}{C_{L0}}$$

onde  $C_{L0}$  representa um coeficiente de sustentação apropriado (de Langre, 2006).

A força de sustentação,  $F_L$ , pode ser escrita como (3.2):

$$F_L = \frac{1}{2}\rho U^2 D L C_L,$$

onde  $\rho$  e  $U$  representam respetivamente a massa volúmica do fluido e a velocidade do escoamento uniforme,  $D$  representa o diâmetro do cilindro e  $L$ , o seu comprimento.

Estes parâmetros permitem, a partir da equação do movimento de um cilindro rígido, de diâmetro  $D$ , elasticamente suportado, com um grau de liberdade (3.3):

$$(m_S + m_F)\ddot{Y} + (r_S + r_F)\dot{Y} + hY = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{L0} Q$$

e das seguintes mudanças de variável (3.25, 3.16 e 3.17):

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} T, \\ y(t) &= \frac{Y(T)}{D}, \\ q(t) &= Q(T) \end{aligned}$$

Chegar a:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(r_S + r_F)}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{4} \frac{\rho U^2}{h} C_{L0} q \quad (\text{A.1})$$

Para obter a forma adimensional de (3.3), considerando a frequência angular natural da estrutura em fluido estacionário,  $\Omega_S = \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}$ , observe-se o segundo termo de (A.1), pode deduzir-se:

$$\begin{aligned} \frac{r_S}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} &= \frac{2(m_S + m_F)}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \xi \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \\ &= \frac{2(m_S + m_F)}{h} \xi \frac{h}{m_S + m_F} \\ &= 2\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{r_F}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} &= \frac{2\pi \frac{S_T U}{D} \gamma \rho D^2}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \\ &= \frac{\frac{S_T U}{D} \gamma \rho D^2}{m_S + m_F} \frac{1}{f_S} = \frac{\gamma}{\frac{m_S + m_F}{\rho D^2}} S_T \frac{U}{f_S D} \\ &= \frac{\gamma}{\frac{m_S + m_F}{\rho D^2}} \Omega = \frac{\gamma}{\mu} \Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

De notar que  $\Omega = S_T U_r$  é a frequência adimensional e  $U_r = \frac{U}{f_S D}$  é a velocidade reduzida. Chega-se assim a:

$$\frac{(r_S + r_F)}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \frac{dy}{dt} = \left( \underbrace{\frac{r_S}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}}_{2\xi} + \underbrace{\frac{r_F}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}}_{\frac{\gamma}{\mu} \Omega} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (\text{A.4})$$

Veja-se o segundo membro de (A.1) e considerando (3.5):

$$f_S = \frac{\sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}}{2\pi}.$$

Pode deduzir-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \frac{\rho U^2}{h} C_{L0} q &= \frac{C_{L0}}{2} \frac{U^2}{\frac{h 8 \pi^2}{4 \pi^2} \frac{1}{\rho}} \\
 &= \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8 \pi^2} \frac{U^2}{\frac{h D^2}{(m_S + m_F) 4 \pi^2} \frac{m_S + m_F}{\rho D^2}} \\
 &= \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8 \pi^2 S_T^2 \mu} \Omega^2 = M \Omega^2,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

O que permite chegar a:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(r_S + r_F)}{h} \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}} \frac{dy}{dt} + y = \underbrace{\frac{1}{4} \frac{\rho U^2}{h} C_{L0} q}_{M \Omega^2}. \tag{A.6}$$

Definindo (3.27, 3.21 e 3.13):

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 2\xi + \frac{\gamma}{\mu} \Omega, \\
 M &= \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8 \pi^2 S_T^2 \mu}, \\
 \mu &= \frac{m_S + m_F}{\rho D^2}.
 \end{aligned}$$

Chega-se, deste modo, a (3.26):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + y = M \Omega^2 q,$$

que representa a forma adimensional da Equação estrutural (3.3).

De forma semelhante e tendo por base a Equação (3.9):

$$\ddot{Q} + \varepsilon \Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = \frac{A}{D} \ddot{Y},$$

deduz-se a correspondente formulação adimensionalizada da equação da esteira (3.28):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon \Omega (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + \Omega^2 q = A \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

As equações adimensionais do modelo de esteira oscilante, com referência à frequência da estrutura passam a ser (3.29):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + y &= M \Omega^2 q \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon \Omega (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + \Omega^2 q &= A \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}$$

## A.2 Adimensionalização referida à esteira

Considere-se a massa acrescentada  $m_F$  (3.6) o coeficiente de amortecimento relativo ao fluido  $r_F$  (3.7), o coeficiente de amortecimento da estrutura  $r_S$  (3.4), a frequência vibratória da estrutura  $\Omega_S$  (3.5) e a frequência da esteira  $\Omega_{s_T}$  (3.10). Através destes parâmetros chega-se à equação do oscilador linear que caracteriza o comportamento vibratório  $Y = Y(T)$  da referida estrutura:

$$\left( \overbrace{m_S}^m + \underbrace{m_F}_{\frac{1}{4}\pi\rho D^2 C_M} \right) \ddot{Y} + \left( \underbrace{r_S}_{2m\Omega_S\xi} + \underbrace{r_F}_{\Omega_{s_T}\gamma\rho D^2} \right) \dot{Y} + hY = S \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + \left( 2\xi\Omega_S + \frac{\gamma}{\frac{m}{\rho D^2}} \Omega_{s_T} \right) \dot{Y} + \frac{h}{m} Y &= \frac{S}{m} \\ \ddot{Y} + \left( 2\xi\Omega_S + \frac{\gamma}{\mu} \Omega_{s_T} \right) \dot{Y} + \frac{h}{m} Y &= \frac{S}{m} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

definindo  $\mu = \frac{m}{\rho D^2}$  (3.13).

Tendo em vista adimensionalizar (A.8) com referência à frequência vibratória da esteira, fazendo as mudanças de variável (3.15, 3.16 e 3.17):

$$\begin{aligned} t &= \Omega_{s_T} T, \\ y(t) &= \frac{Y(T)}{D}, \\ q(t) &= Q(T) \end{aligned}$$

deduz-se:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + \left( 2\xi\Omega_S + \frac{\gamma}{\mu} \Omega_{s_T} \right) \dot{Y} + \frac{h}{m} Y &= \frac{S}{m} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( 2\xi \frac{\Omega_S}{\Omega_{s_T}} + \frac{\gamma}{\mu} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{\Omega_S^2}{\Omega_{s_T}^2} \times y(t) &= \frac{S}{\Omega_{s_T}^2 D m} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Obtém-se, por fim (3.19):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{dy}{dt} + \delta^2 y = s$$

onde  $\delta = \frac{\Omega_s}{\Omega_{s_T}}$  (3.18).

Considerando a oscilação da esteira  $Q = Q(T)$ , descrita pela Equação de van der Pol (3.9):

$$\ddot{Q} + \varepsilon \Omega_{s_T} (Q^2 - 1) \dot{Q} + \Omega_{s_T}^2 Q = F,$$

e tendo por base as mudanças de variável (3.15 e 3.17), deduz-se:

$$\begin{aligned} \Omega_{s_T}^2 \frac{d^2q}{dt^2} + \varepsilon \Omega_{s_T} (q^2 - 1) \Omega_{s_T} \frac{dq}{dt} + \Omega_{s_T}^2 q &= F \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q &= f. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Assim, fazendo (3.20 e 3.21)

$$\begin{aligned} s &= Mq \text{ e} \\ M &= \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_T^2 \mu}, \end{aligned}$$

as equações adimensionais do modelo de esteira oscilante, com referência à frequência da esteira são (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + \left(2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{dy}{dt} + \delta^2 y &= s \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q &= f \end{aligned}$$

# Apêndice B

## Simulações temporais

### B.1 Acoplamento em aceleração

Neste apêndice são apresentadas as simulações temporais e respostas frequenciais para o acoplamento em aceleração, que como referido anteriormente, se baseiam-se no modelo de Facchinetti.

Os cálculos foram efetuados para velocidades reduzidas ( $U_r$ ) de 1 até 10, com intervalos de 0.5. Para cada valor de  $U_r$  foram geradas as respostas temporais que incluem o movimento do cilindro ( $y$ ) e a resposta oscilatória da esteira ( $q$ ), ambos em função do tempo, na forma adimensional. Apresenta-se também, para cada  $U_r$ , o gráfico da diferença de fase instantânea entre o sinal correspondente à esteira e o sinal correspondente ao cilindro, bem como o respetivo desfasamento médio entre esses sinais.

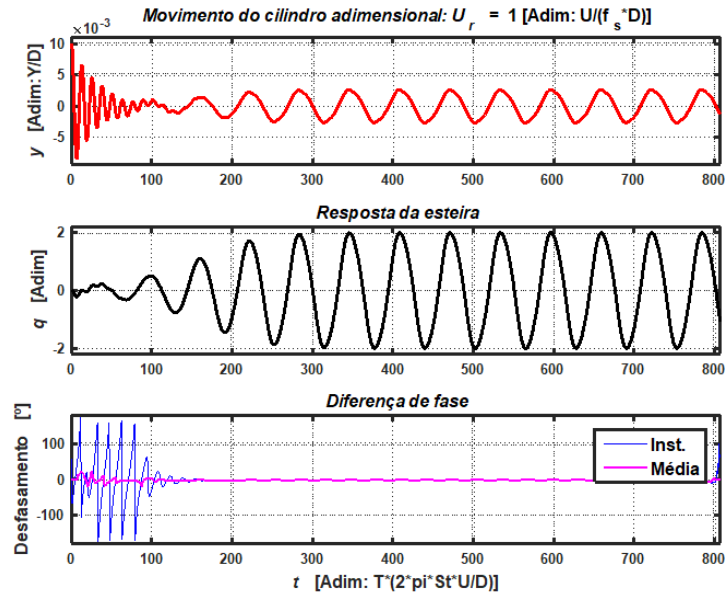


Figura B.1: Resposta temporal para  $U_r = 1.0$  - acoplamento em aceleração.

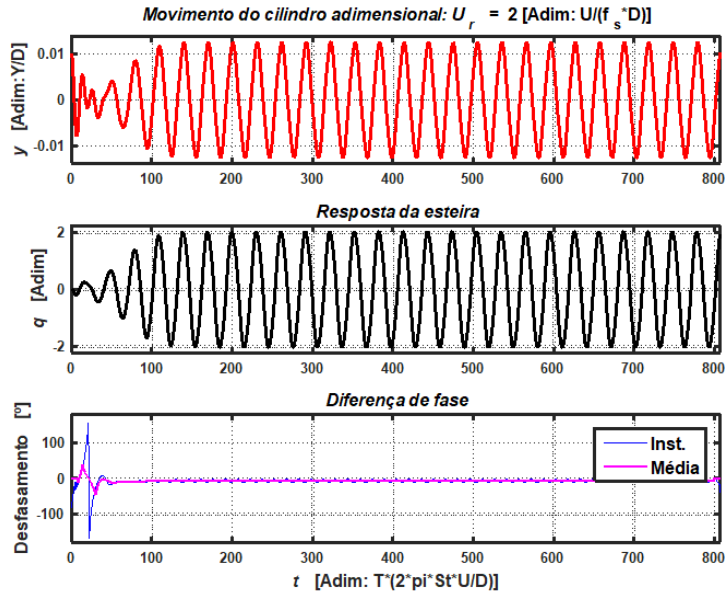


Figura B.2: Resposta temporal para  $U_r = 2.0$  - acoplamento em aceleração.



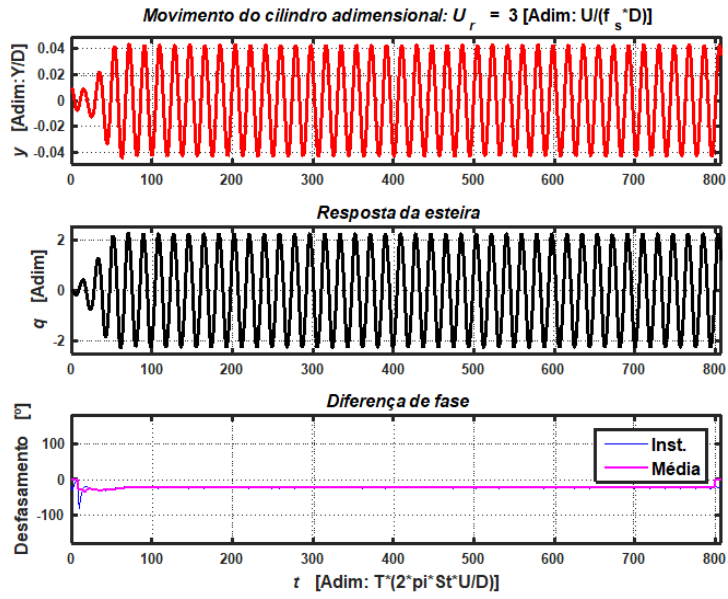


Figura B.3: Resposta temporal para  $Ur = 3.0$  - acoplamento em aceleração.

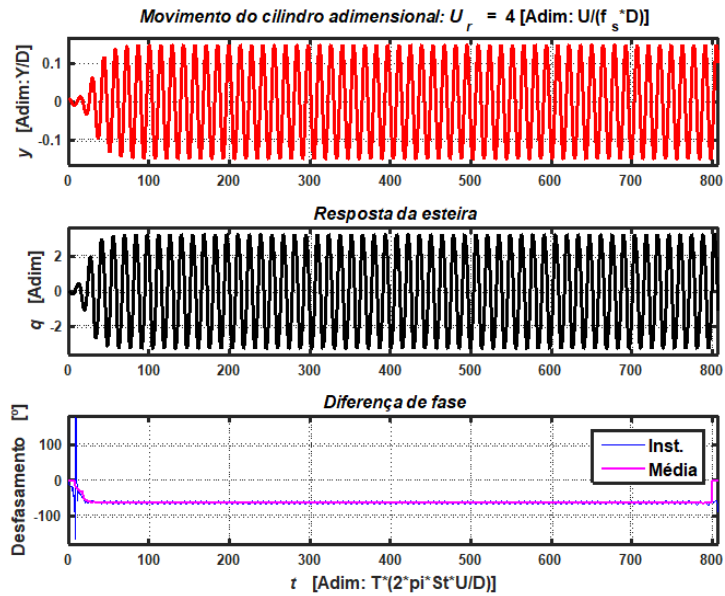


Figura B.4: Resposta temporal para  $Ur = 4.0$  - acoplamento em aceleração.

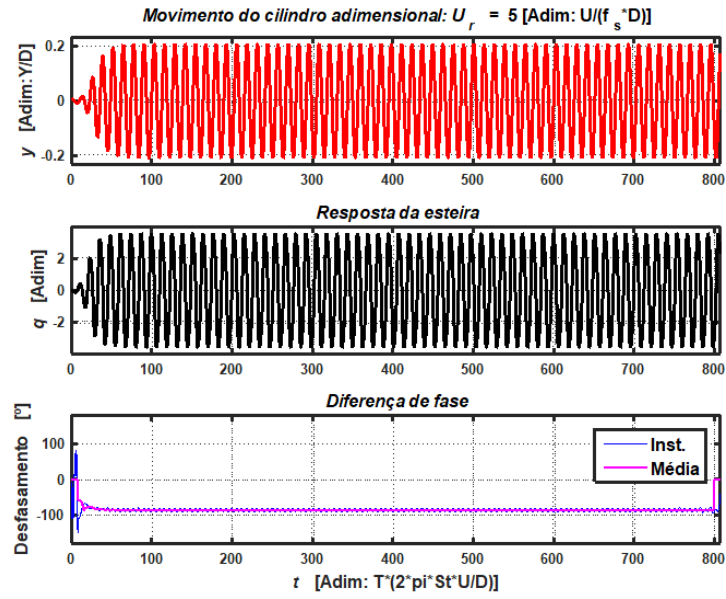


Figura B.5: Resposta temporal para  $Ur = 5.0$  - acoplamento em aceleração.

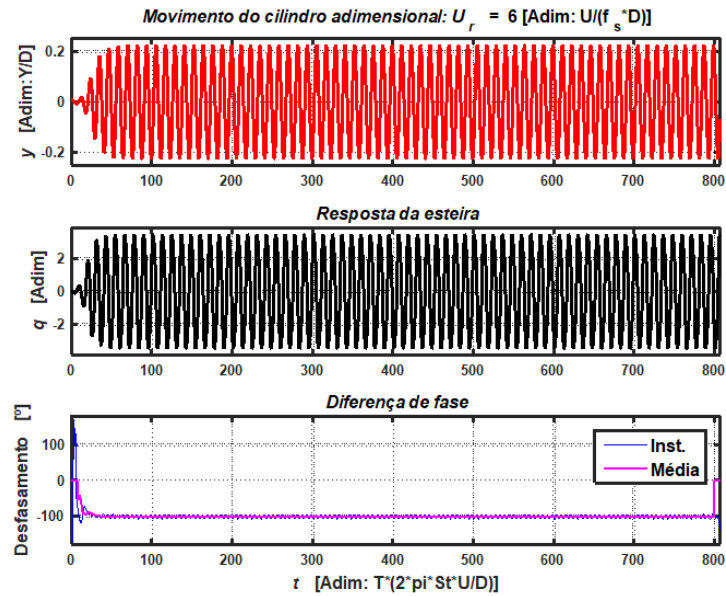


Figura B.6: Resposta temporal para  $Ur = 6.0$  - acoplamento em aceleração.

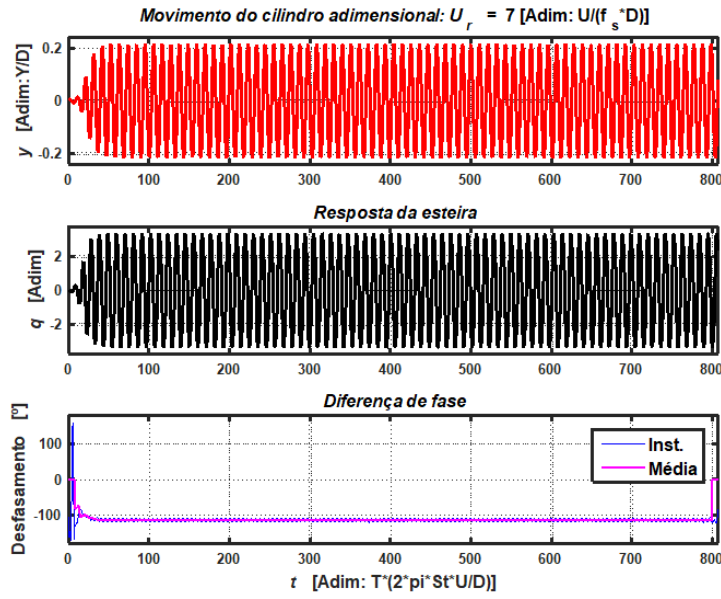


Figura B.7: Resposta temporal para  $Ur = 7.0$  - acoplamento em aceleração.

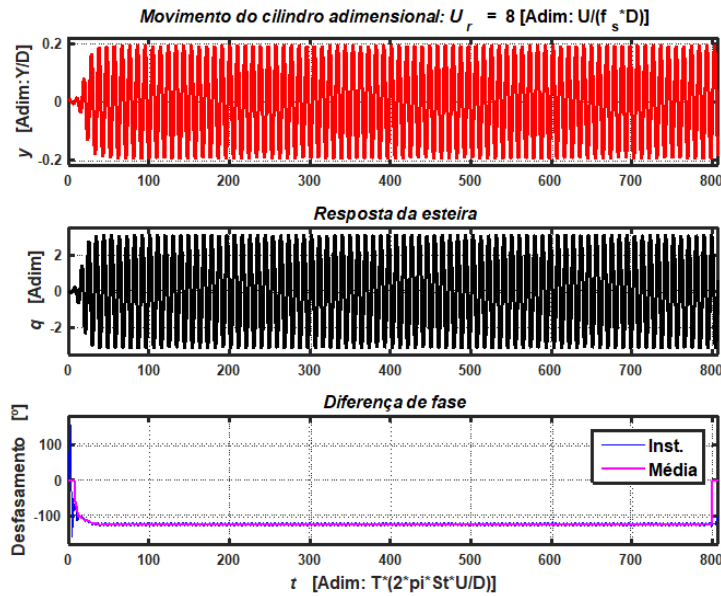


Figura B.8: Resposta temporal para  $Ur = 8.0$  - acoplamento em aceleração.

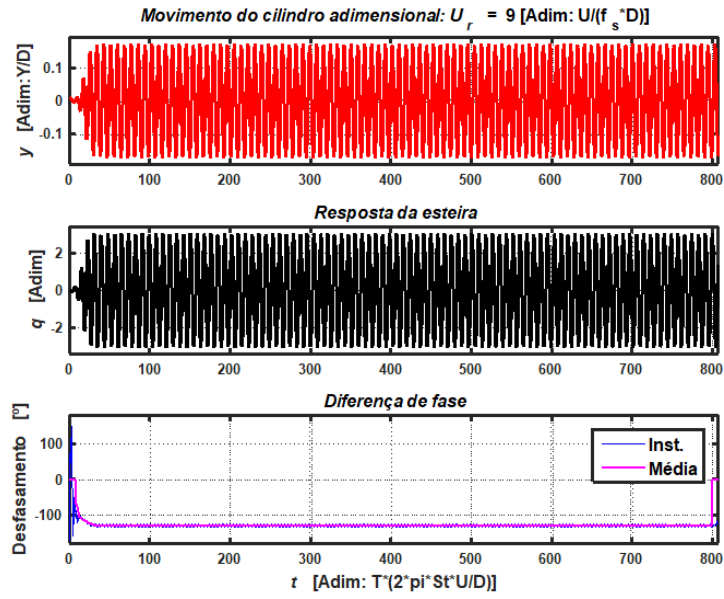


Figura B.9: Resposta temporal para  $Ur = 9.0$  - acoplamento em aceleração.

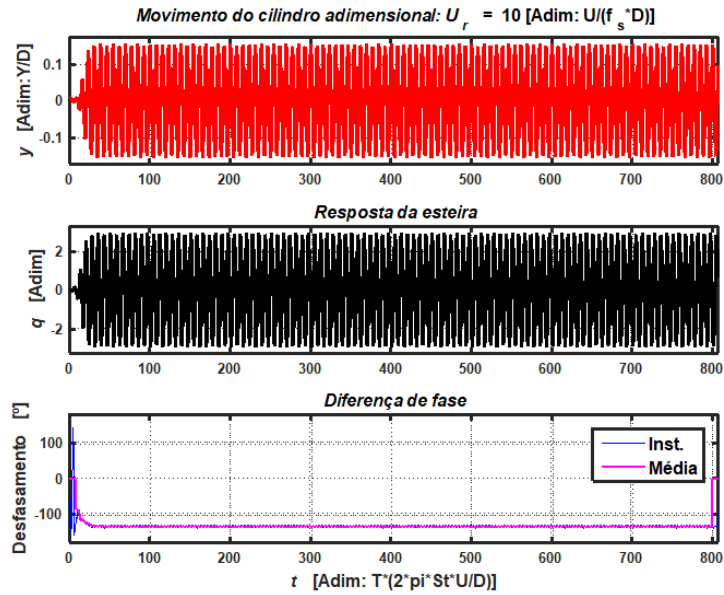


Figura B.10: Resposta temporal para  $Ur = 10.0$  - acoplamento em aceleração.

As respostas frequenciais, relativas ao acoplamento em aceleração, são

apresentadas de seguida. Estas mostram, para cada valor de  $U_r$ , a densidade de energia espectral em função da frequência adimensional, onde a resposta frequencial do cilindro está representada a vermelho e da esteira a preto.

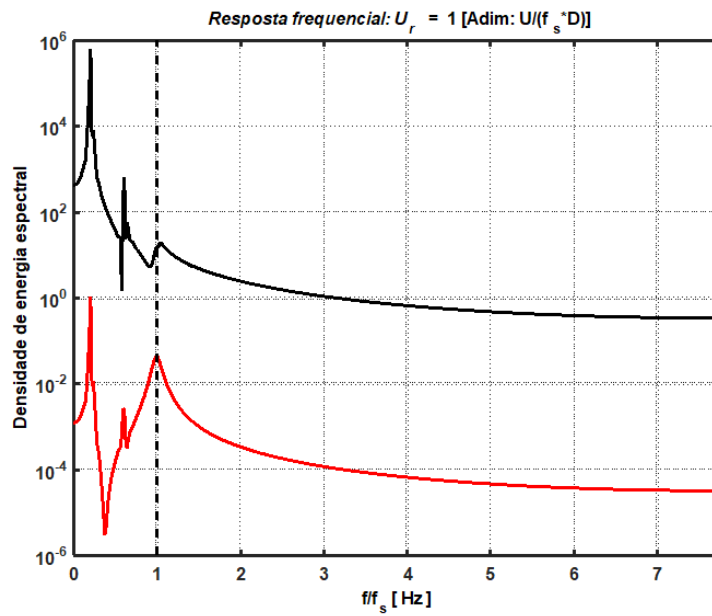


Figura B.11: Resposta frequencial para  $U_r = 1.0$  - acoplamento em aceleração.

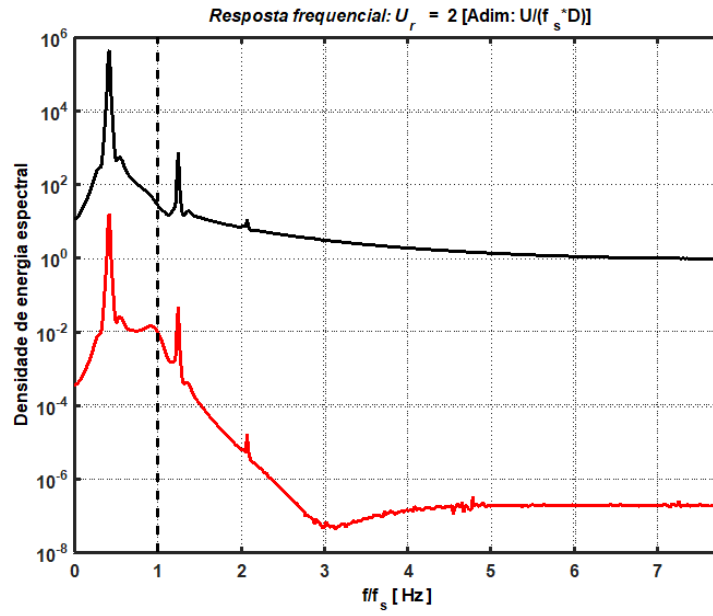


Figura B.12: Resposta frequencial para  $U_r = 2.0$  - acoplamento em aceleração.

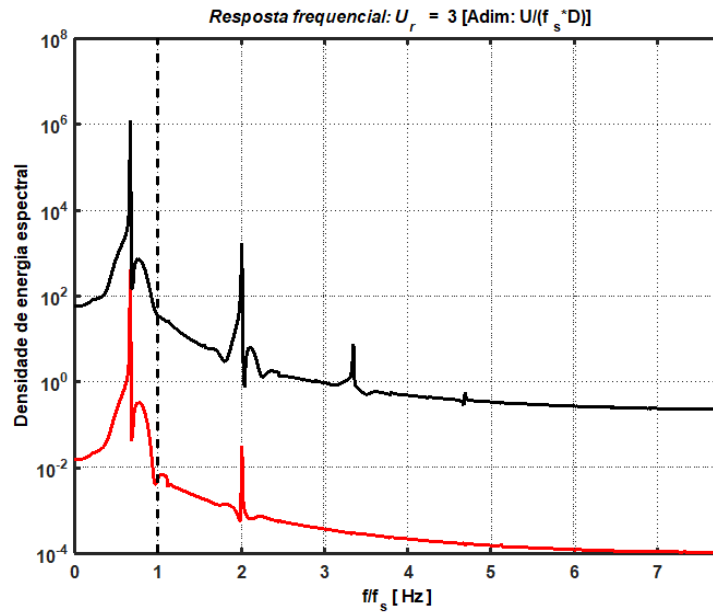


Figura B.13: Resposta frequencial para  $U_r = 3.0$  - acoplamento em aceleração.

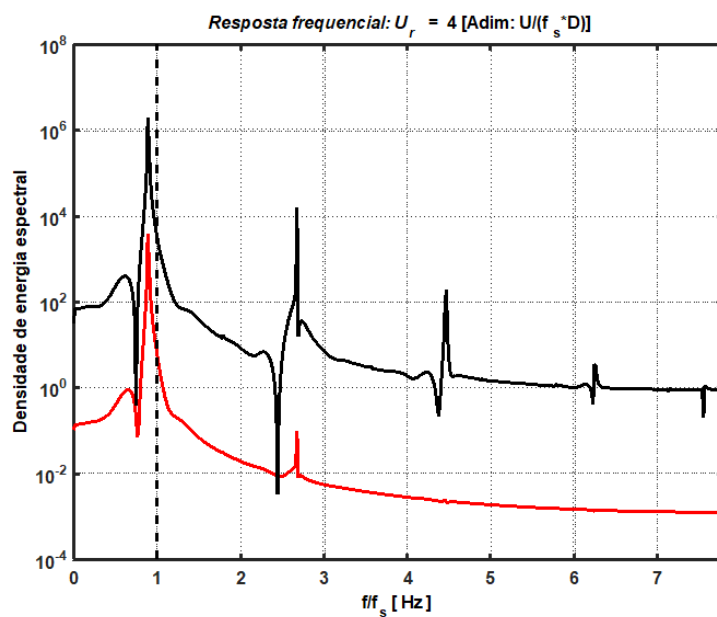


Figura B.14: Resposta frequencial para  $U_r = 4.0$  - acoplamento em aceleração.

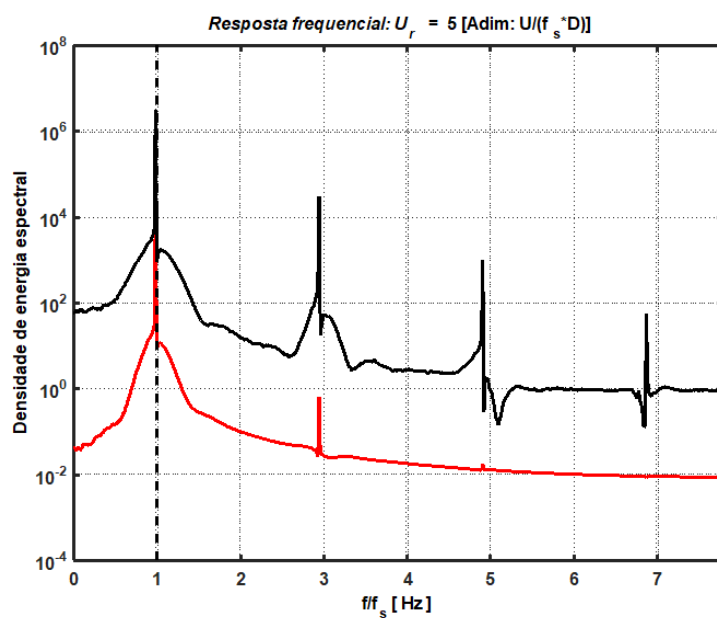


Figura B.15: Resposta frequencial para  $U_r = 5.0$  - acoplamento em aceleração.

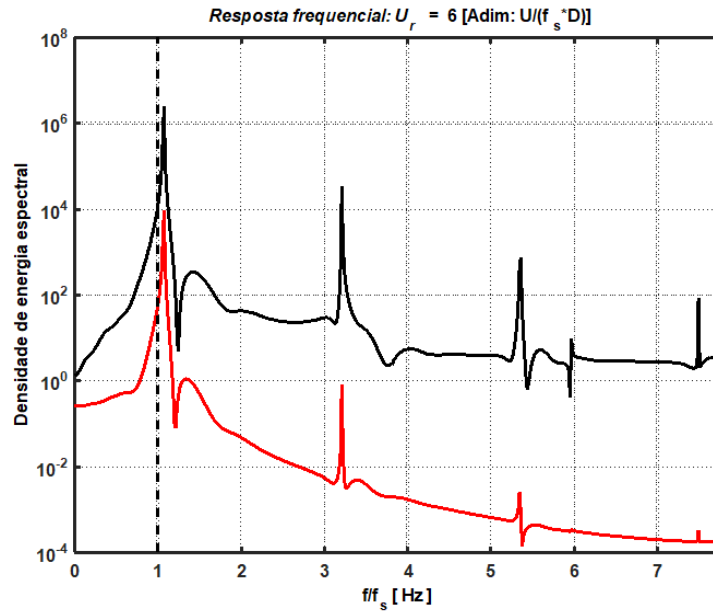


Figura B.16: Resposta frequencial para  $U_r = 6.0$  - acoplamento em aceleração.

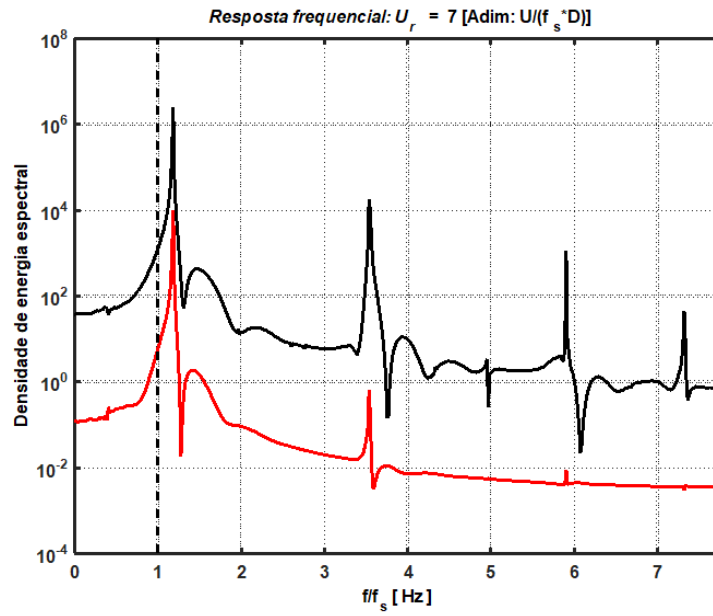


Figura B.17: Resposta frequencial para  $U_r = 7.0$  - acoplamento em aceleração.



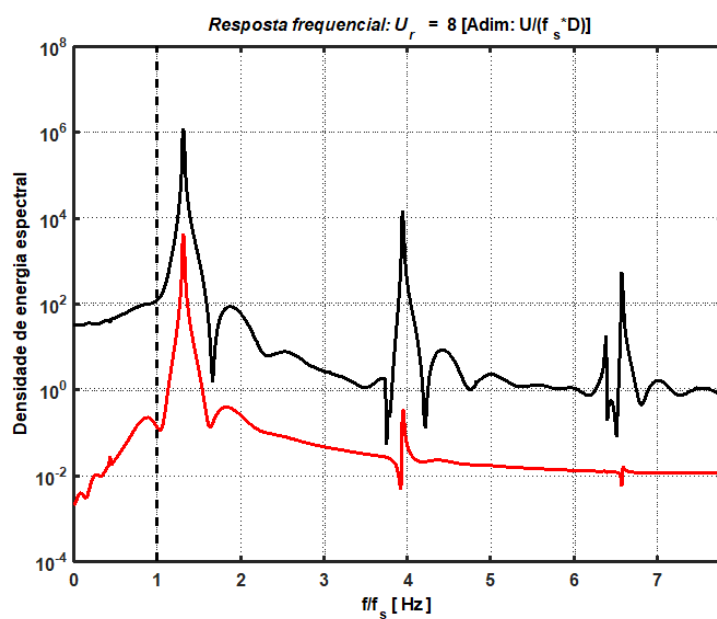


Figura B.18: Resposta frequencial para  $Ur = 8.0$  - acoplamento em aceleração.

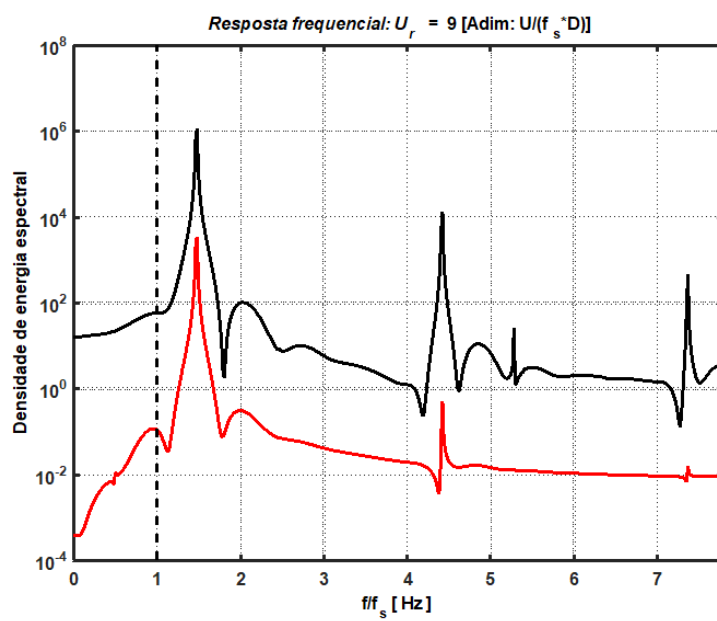


Figura B.19: Resposta frequencial para  $Ur = 9.0$  - acoplamento em aceleração.

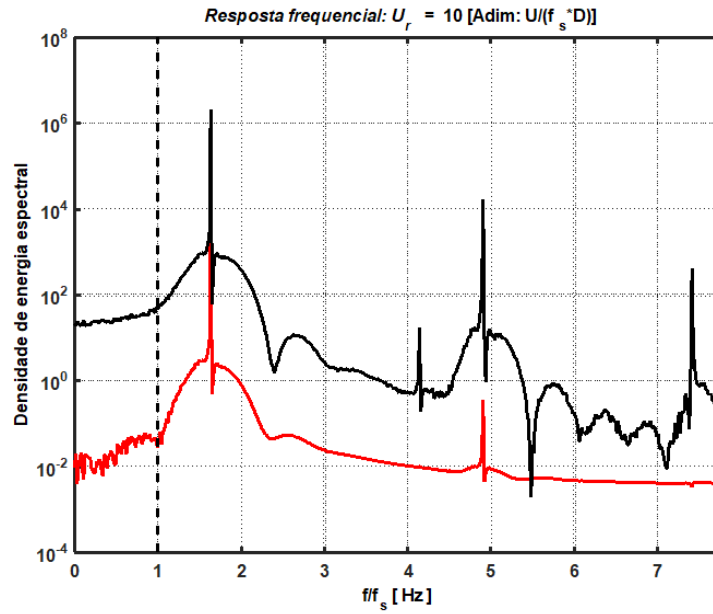


Figura B.20: Resposta frequencial para  $U_r = 10.0$  - acoplamento em aceleração.

## B.2 Acoplamento em velocidade

São apresentadas, de seguida, as simulações temporais e respostas frequenciais para o acoplamento em velocidade. Da mesma forma que o acoplamento em aceleração, estas baseiam-se no modelo de Facchinetti e mostram os cálculos efetuados para velocidades reduzidas ( $U_r$ ) de 1 até 10, com intervalos de 0.5. Para cada valor de  $U_r$  foram geradas as respostas temporais que incluem o movimento do cilindro ( $y$ ) e a resposta oscilatória da esteira ( $q$ ), a diferença de fase instantânea entre o sinal correspondente à esteira e o sinal correspondente ao cilindro, bem como o respetivo desfasamento médio entre esses dois sinais.

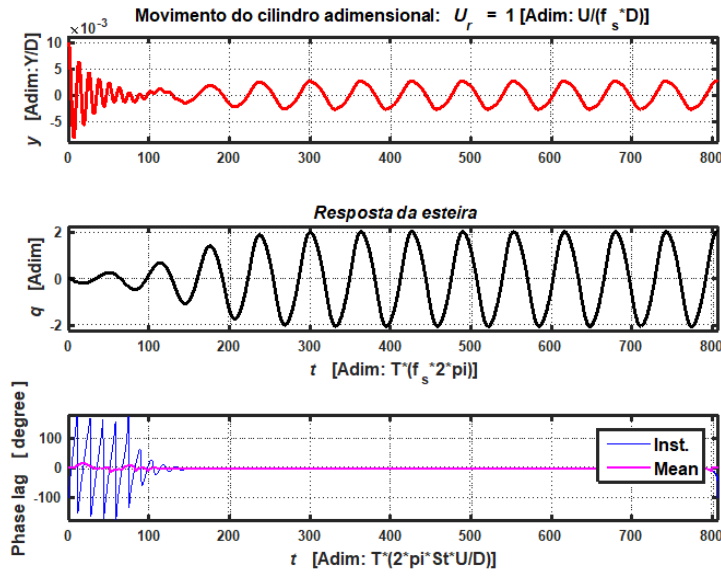


Figura B.21: Resposta temporal para  $U_r = 1.0$  - acoplamento em velocidade.

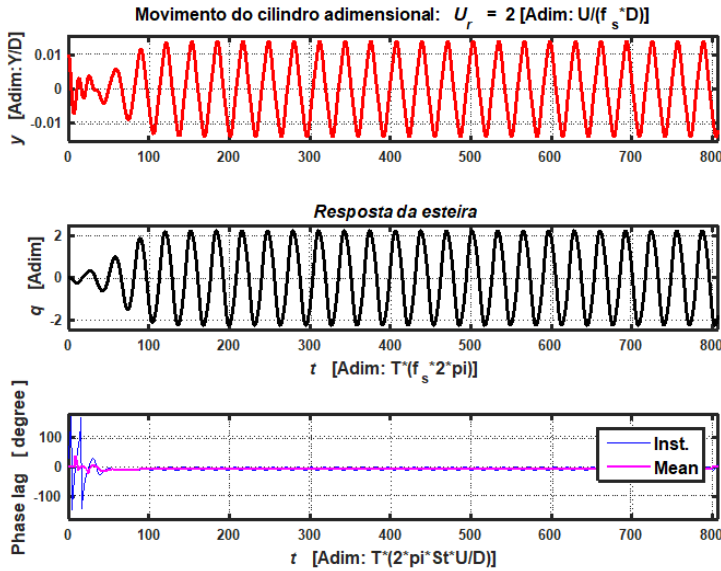


Figura B.22: Resposta temporal para  $U_r = 2.0$  - acoplamento em velocidade.

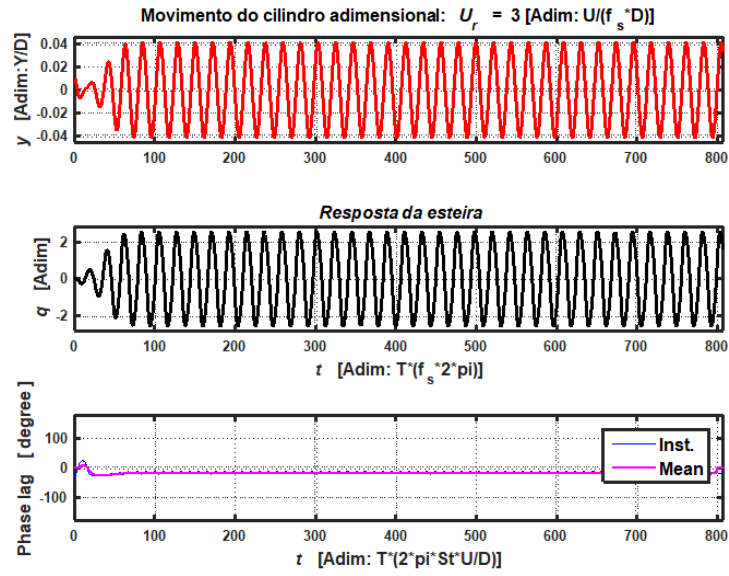


Figura B.23: Resposta temporal para  $Ur = 3.0$  - acoplamento em velocidade.

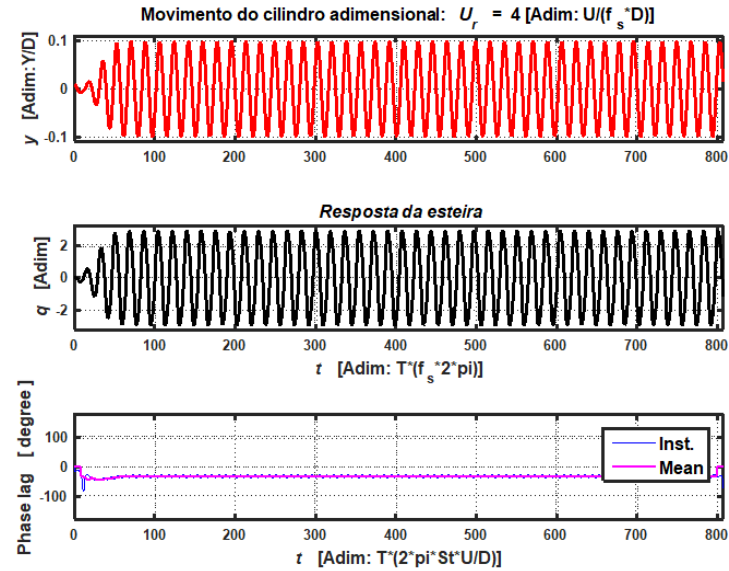


Figura B.24: Resposta temporal para  $Ur = 4.0$  - acoplamento em velocidade.

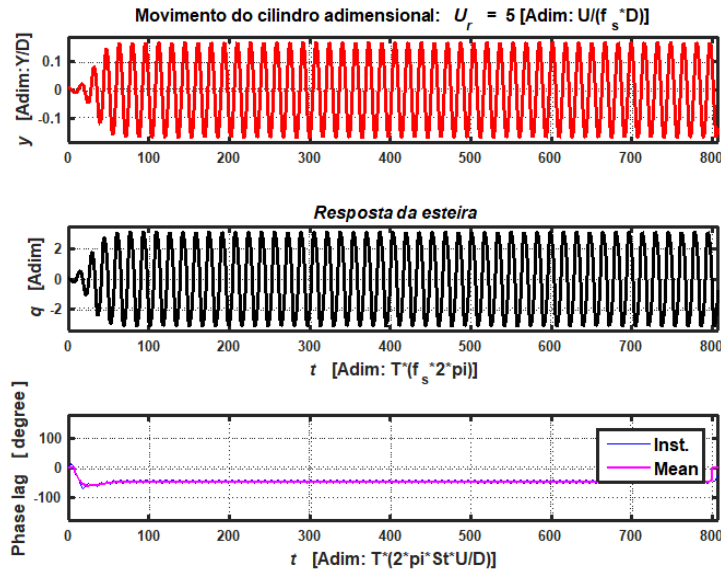


Figura B.25: Resposta temporal para  $U_r = 5.0$  - acoplamento em velocidade.

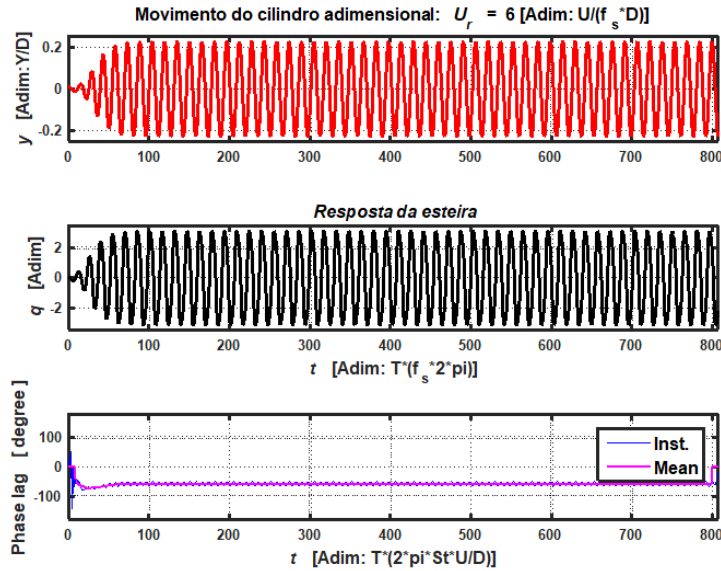


Figura B.26: Resposta temporal para  $U_r = 6.0$  - acoplamento em velocidade.

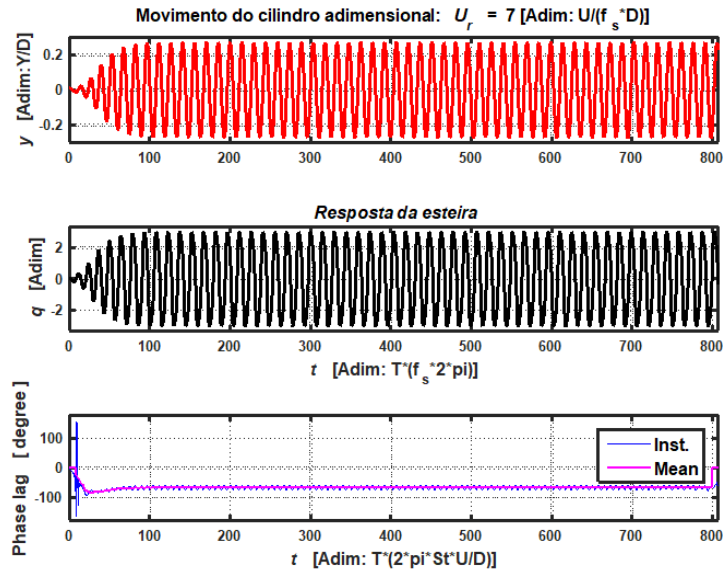


Figura B.27: Resposta temporal para  $Ur = 7.0$  - acoplamento em velocidade.

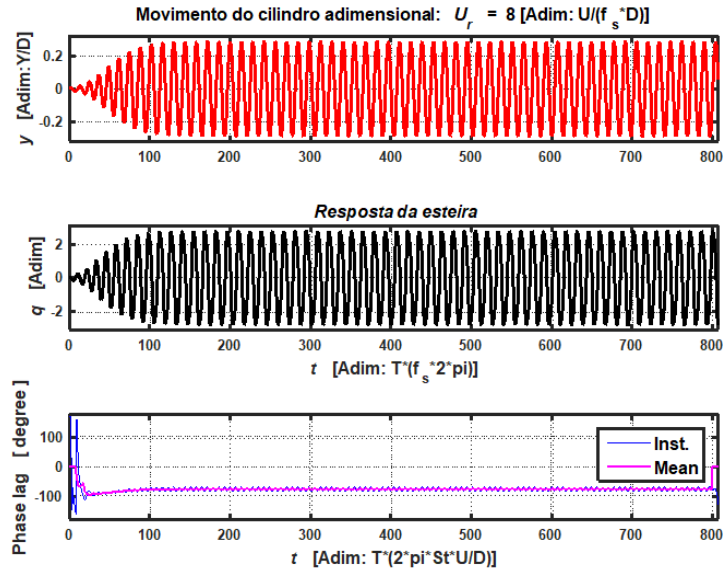


Figura B.28: Resposta temporal para  $Ur = 8.0$  - acoplamento em velocidade.

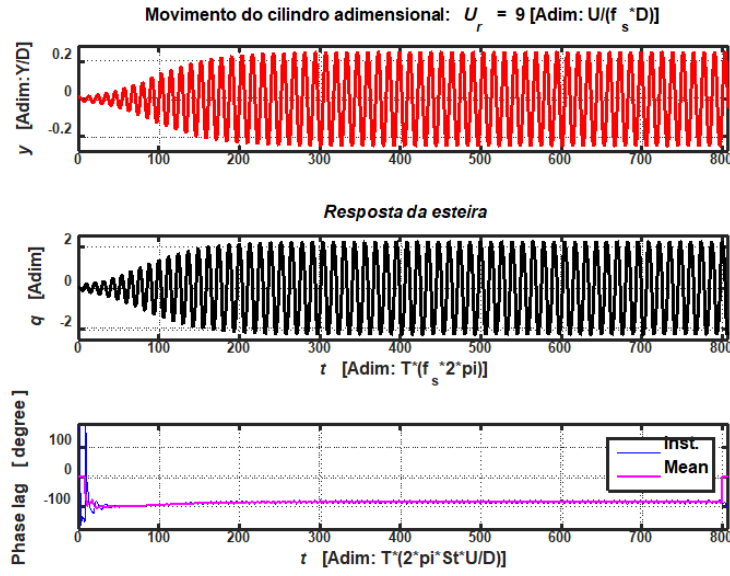


Figura B.29: Resposta temporal para  $U_r = 9.0$  - acoplamento em velocidade.

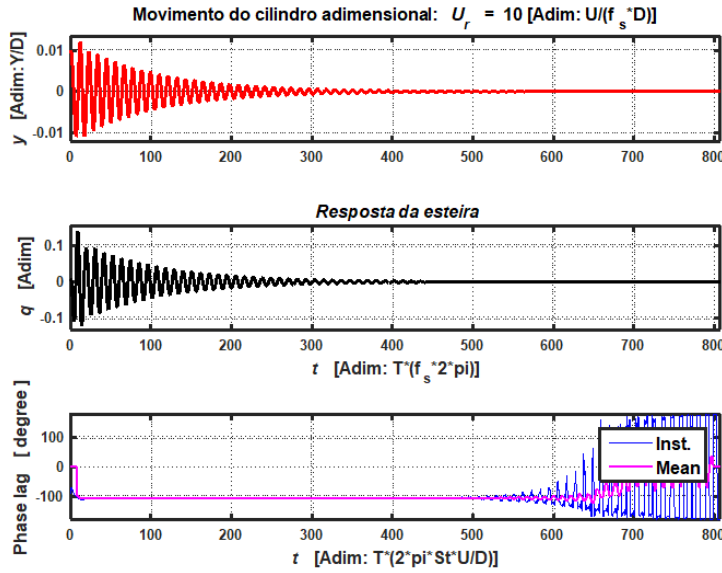


Figura B.30: Resposta temporal para  $U_r = 10.0$  - acoplamento em velocidade.

As respostas frequenciais, relativas ao acoplamento em velocidade, são

apresentadas de seguida. Estas mostram, para cada valor de  $U_r$ , a densidade de energia espectral em função da frequência adimensional, onde a resposta frequencial do cilindro está representada a vermelho e da esteira a preto.

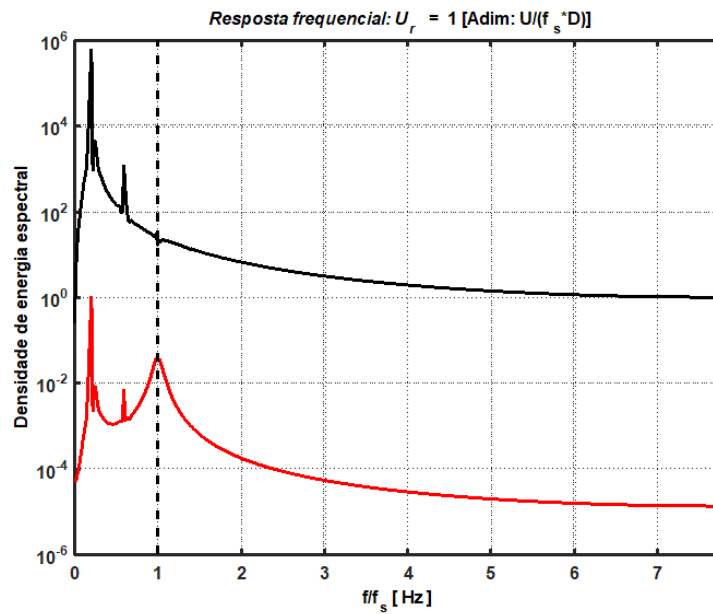


Figura B.31: Resposta frequencial para  $U_r = 1.0$  - acoplamento em velocidade.



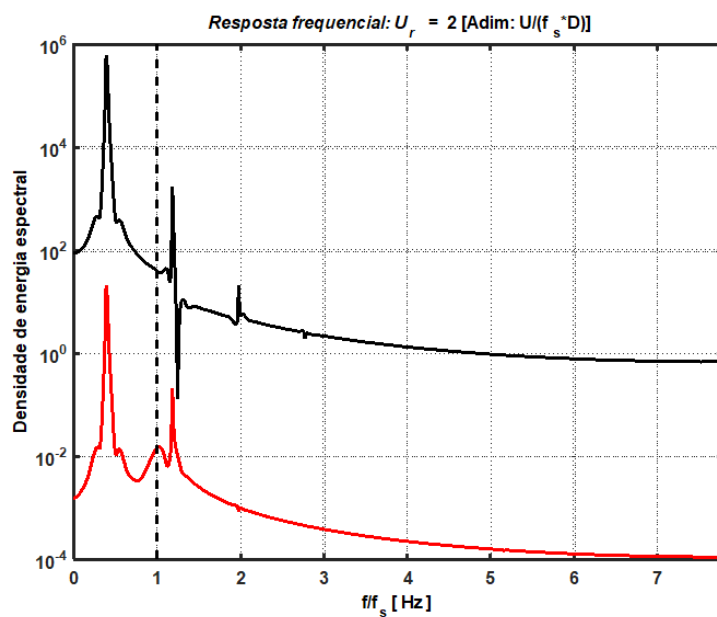


Figura B.32: Resposta frequencial para  $U_r = 2.0$  - acoplamento em velocidade.

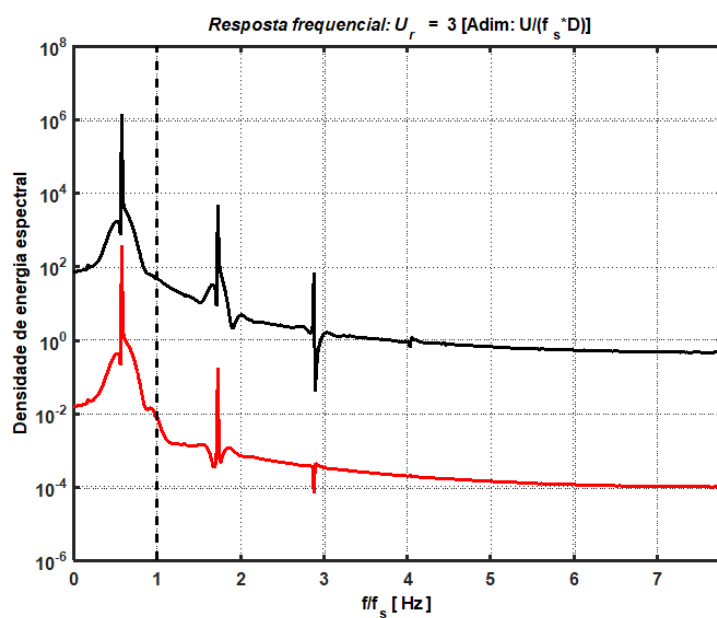


Figura B.33: Resposta frequencial para  $U_r = 3.0$  - acoplamento em velocidade.

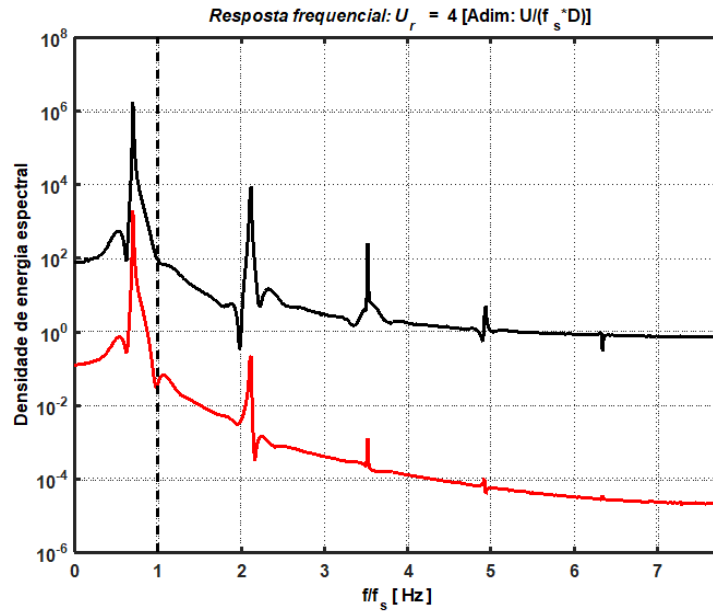


Figura B.34: Resposta frequencial para  $U_r = 4.0$  - acoplamento em velocidade.

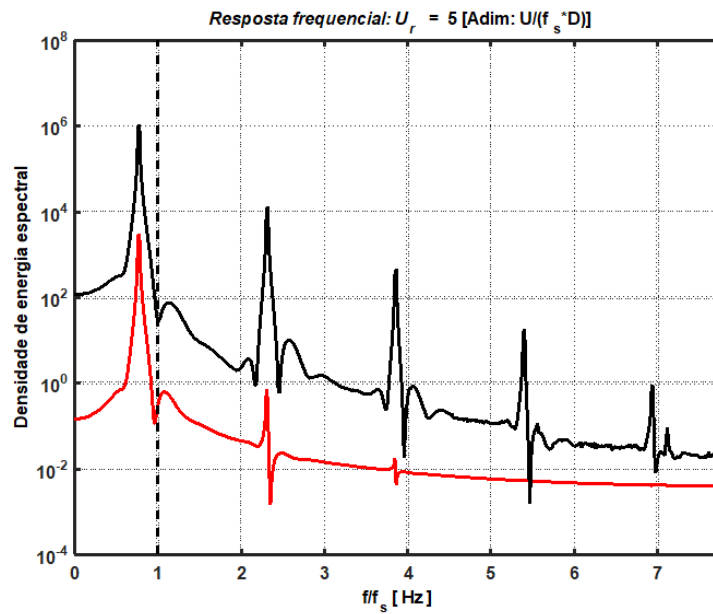


Figura B.35: Resposta frequencial para  $U_r = 5.0$  - acoplamento em velocidade.

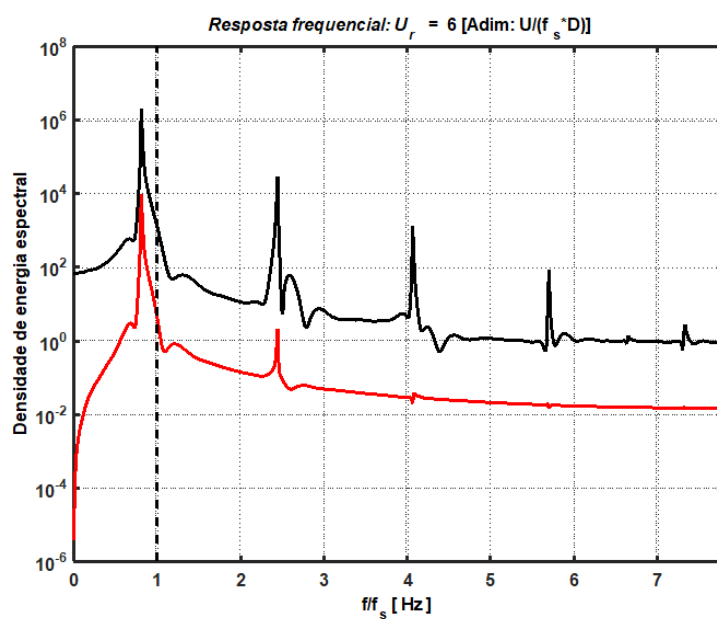


Figura B.36: Resposta frequencial para  $Ur = 6.0$  - acoplamento em velocidade.

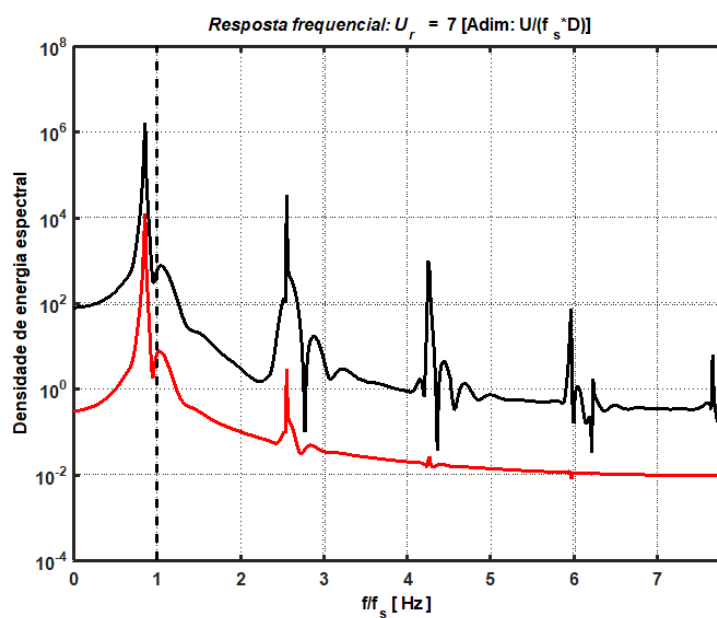


Figura B.37: Resposta frequencial para  $Ur = 7.0$  - acoplamento em velocidade.

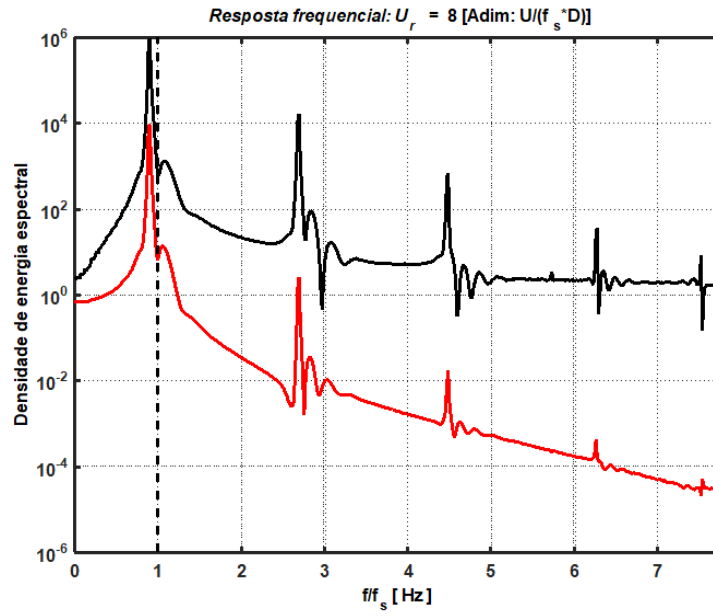


Figura B.38: Resposta frequencial para  $Ur = 8.0$  - acoplamento em velocidade.

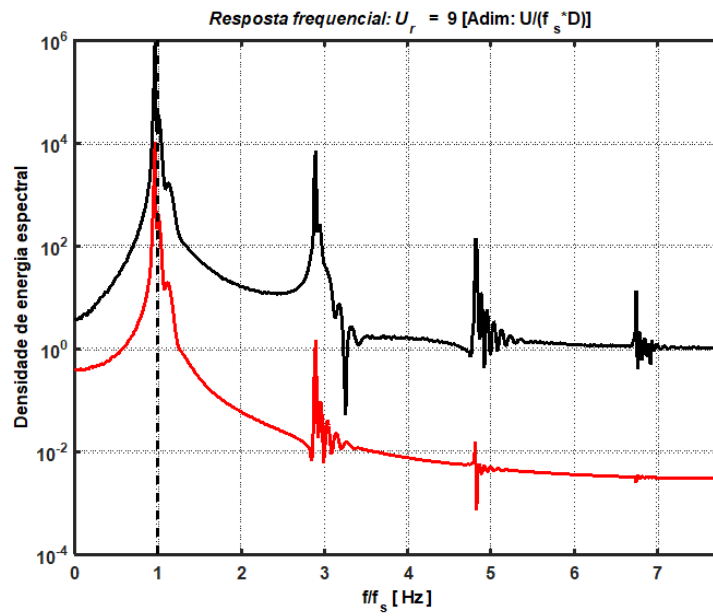


Figura B.39: Resposta frequencial para  $Ur = 9.0$  - acoplamento em velocidade.

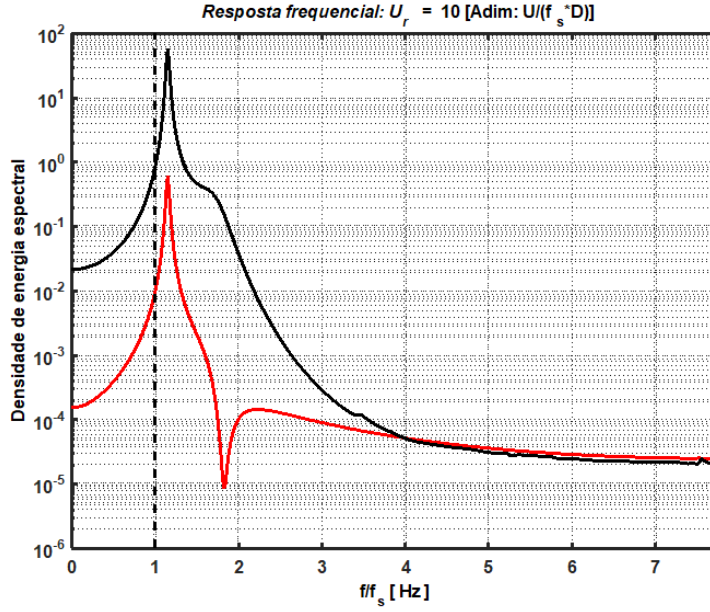


Figura B.40: Resposta frequencial para  $U_r = 10.0$  - acoplamento em velocidade.

### B.3 Acoplamento em deslocamento

São apresentadas, de seguida, as simulações temporais e respostas frequenciais para o acoplamento em deslocamento, também estas se baseiam no modelo de Facchinetti. Mostram-se os cálculos efetuados para velocidades reduzidas ( $U_r$ ) de 1 até 10, com intervalos de 0.5. Para cada valor de  $U_r$  foram geradas as respostas temporais que incluem o movimento do cilindro ( $y$ ) e a resposta oscilatória da esteira ( $q$ ), a diferença de fase instantânea entre o sinal correspondente à esteira e o sinal correspondente ao cilindro, bem como o respetivo desfasamento médio entre esses dois sinais.

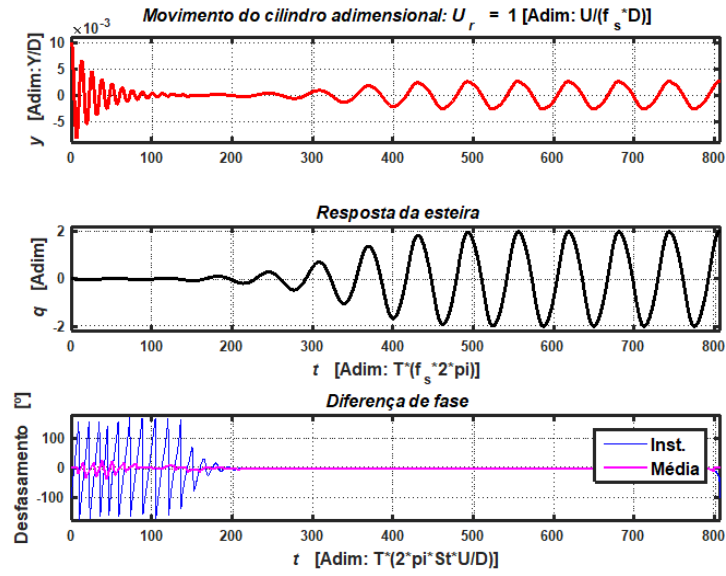


Figura B.41: Resposta temporal para  $Ur = 1.0$  - acoplamento em deslocamento.

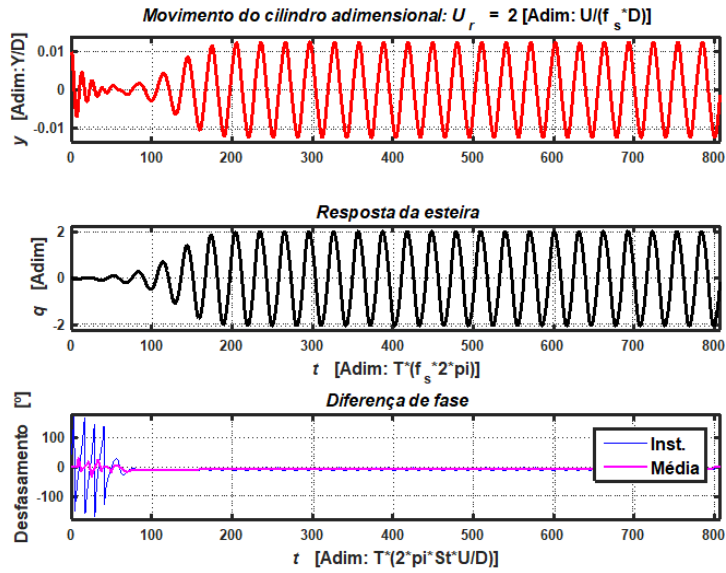


Figura B.42: Resposta temporal para  $Ur = 2.0$  - acoplamento em deslocamento.

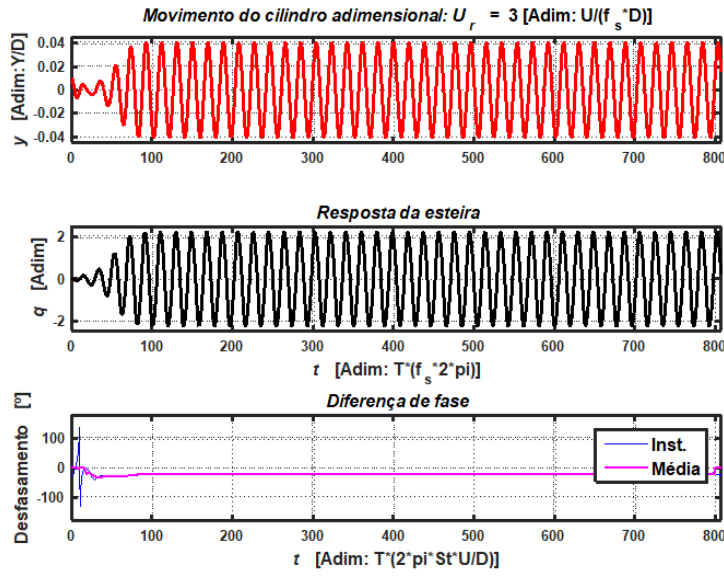


Figura B.43: Resposta temporal para  $Ur = 3.0$  - acoplamento em deslocamento.

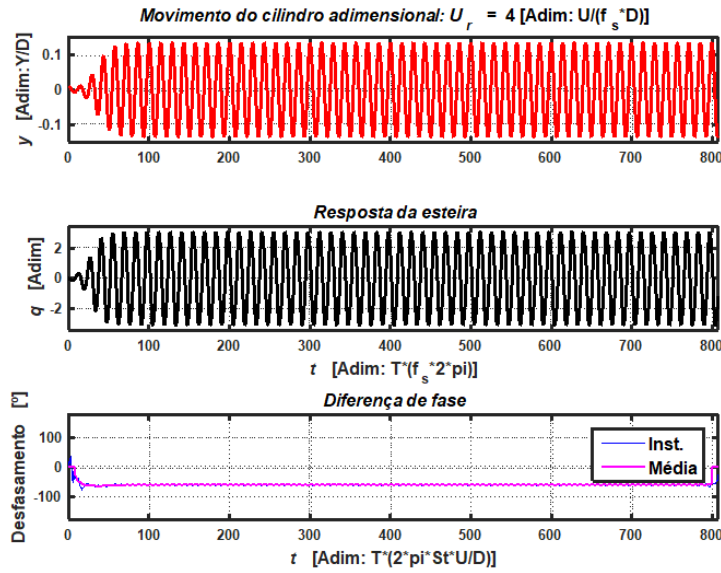


Figura B.44: Resposta temporal para  $Ur = 4.0$  - acoplamento em deslocamento.

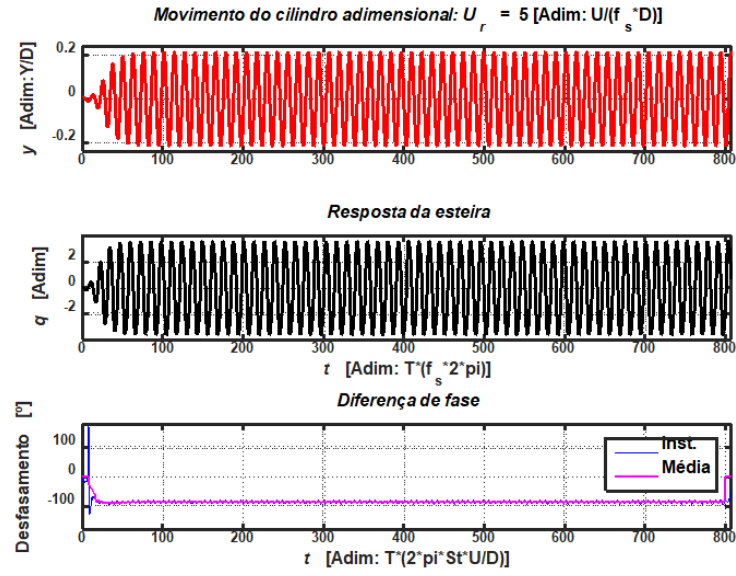


Figura B.45: Resposta temporal para  $Ur = 5.0$  - acoplamento em deslocamento.

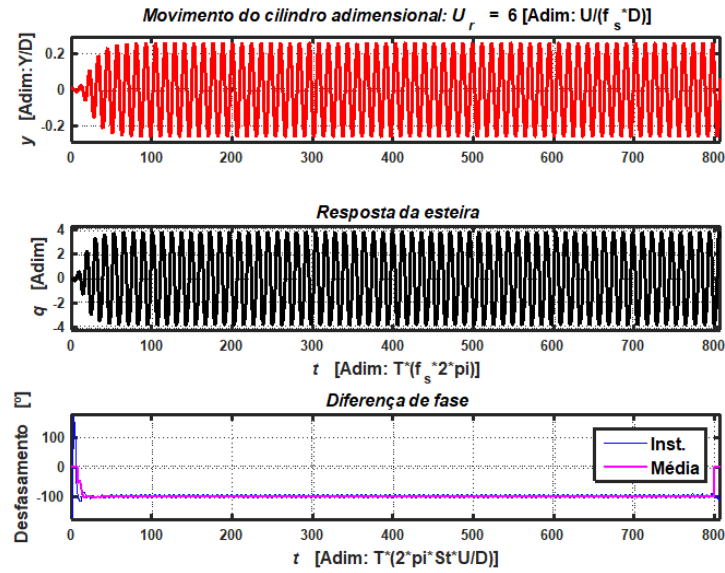


Figura B.46: Resposta temporal para  $Ur = 6.0$  - acoplamento em deslocamento.



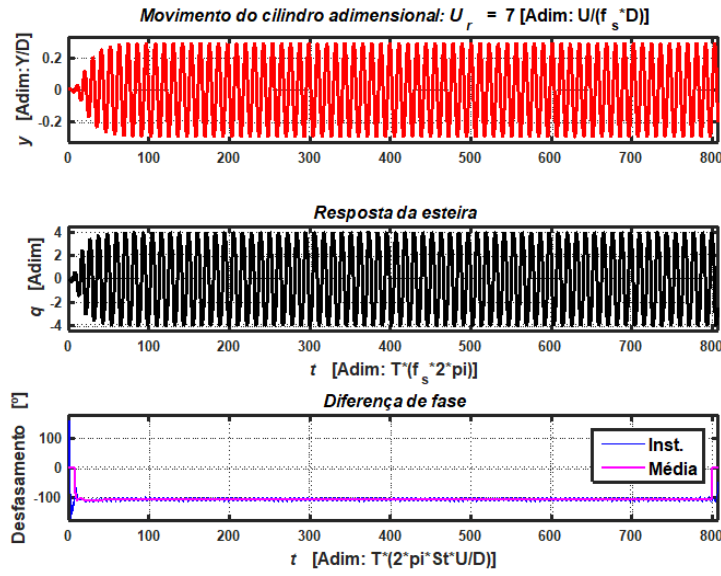


Figura B.47: Resposta temporal para  $Ur = 7.0$  - acoplamento em deslocamento.

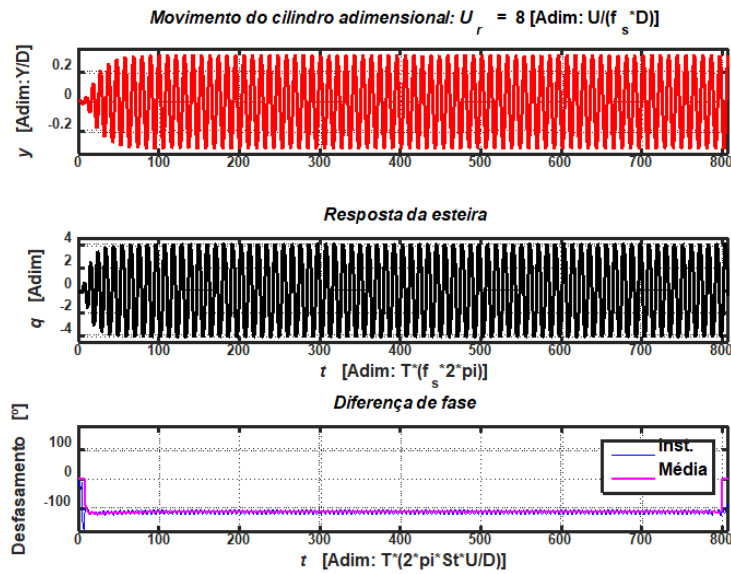


Figura B.48: Resposta temporal para  $Ur = 8.0$  - acoplamento em deslocamento.

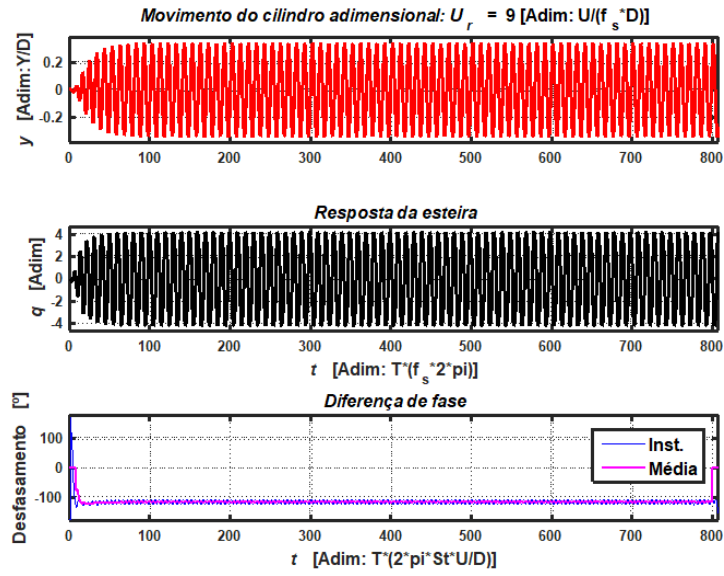


Figura B.49: Resposta temporal para  $Ur = 9.0$  - acoplamento em deslocamento.

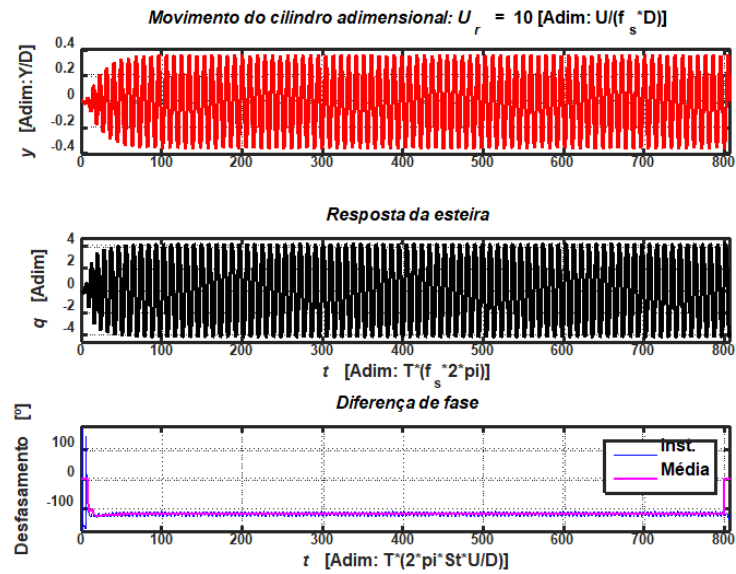


Figura B.50: Resposta temporal para  $Ur = 10.0$  - acoplamento em deslocamento.

As respostas frequenciais, relativas ao acoplamento em deslocamento, são apresentadas de seguida. Estas mostram, tal como nos outros acoplamentos, para cada valor de  $U_r$ , a densidade de energia espectral em função da frequência adimensional, onde a resposta frequencial do cilindro está representada a vermelho e da esteira a preto.

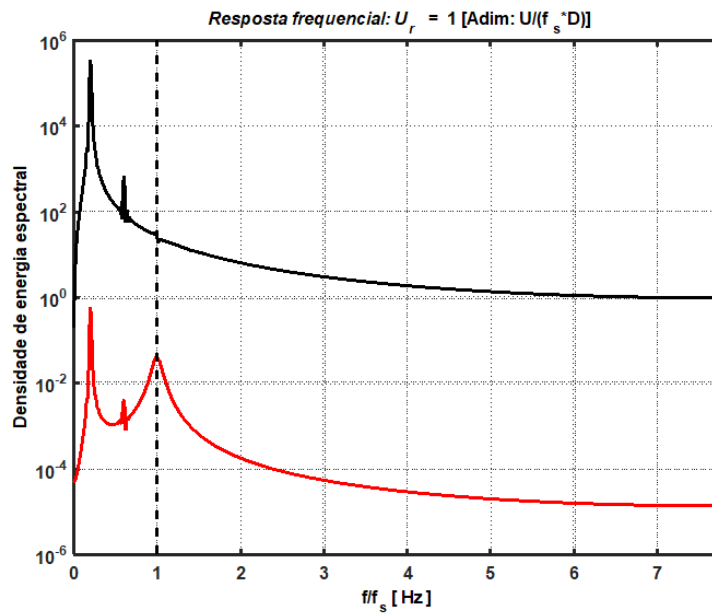


Figura B.51: Resposta frequencial para  $U_r = 1.0$  - acoplamento em deslocamento.

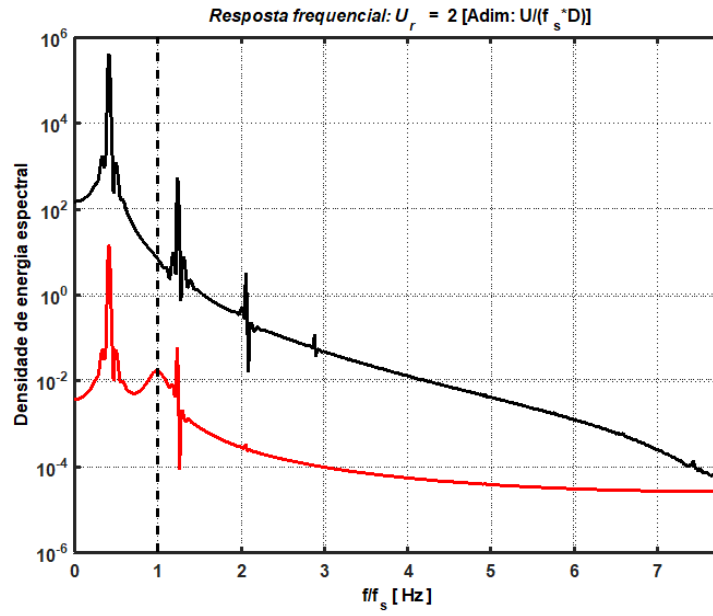


Figura B.52: Resposta frequencial para  $U_r = 2.0$  - acoplamento em deslocamento.

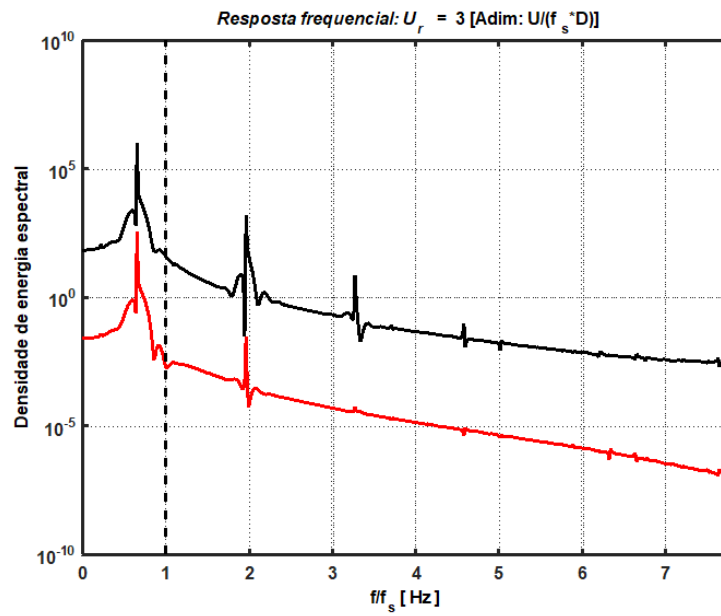


Figura B.53: Resposta frequencial para  $U_r = 3.0$  - acoplamento em deslocamento.

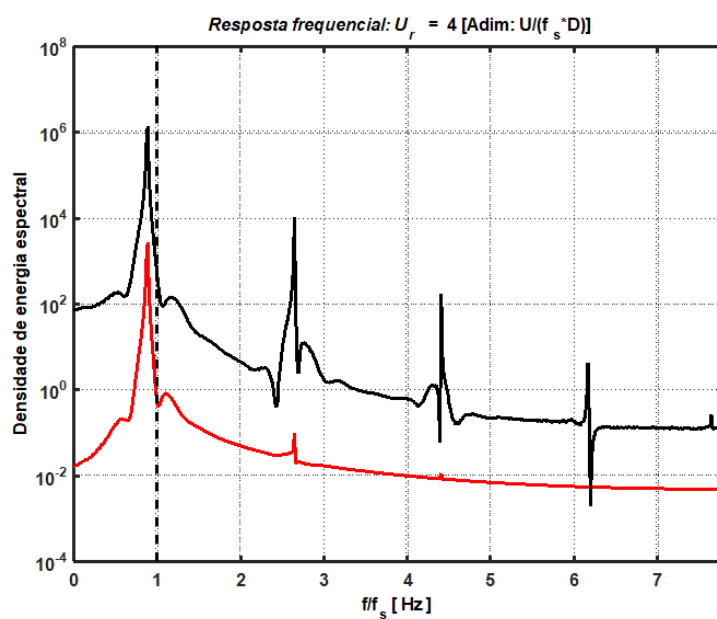


Figura B.54: Resposta frequencial para  $U_r = 4.0$  - acoplamento em deslocamento.

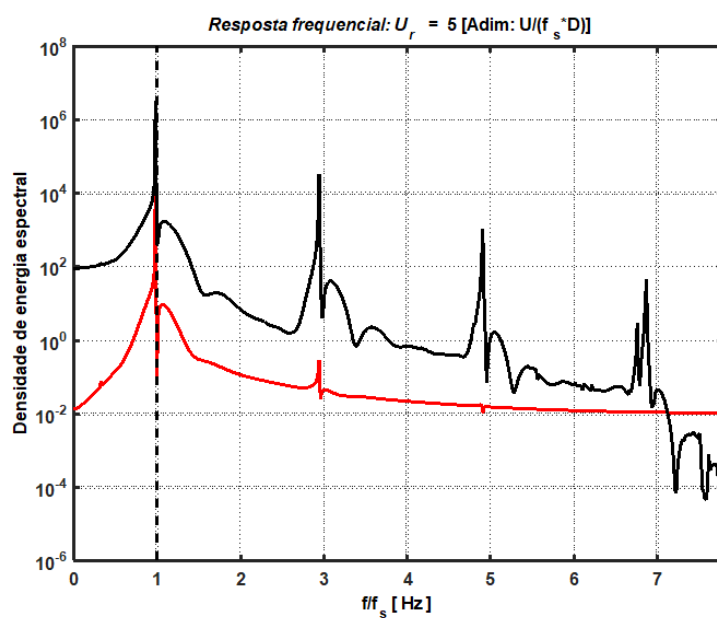


Figura B.55: Resposta frequencial para  $U_r = 5.0$  - acoplamento em deslocamento.

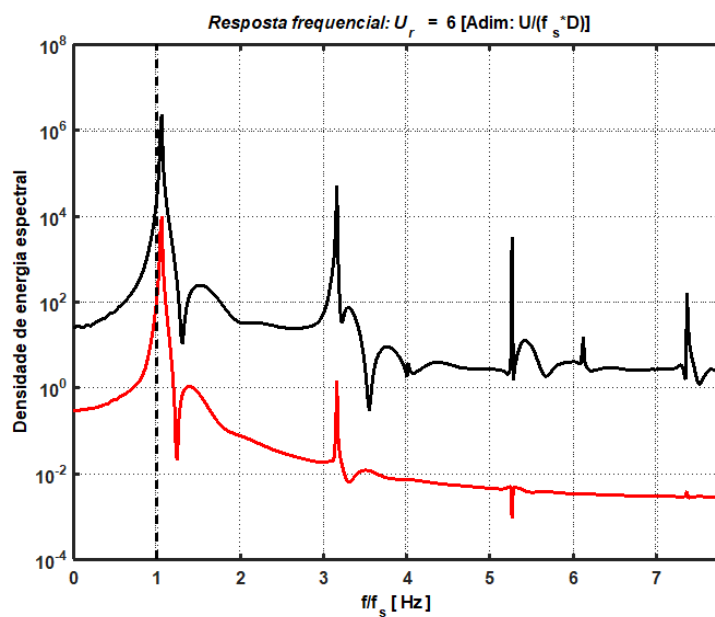


Figura B.56: Resposta frequencial para  $U_r = 6.0$  - acoplamento em deslocamento.

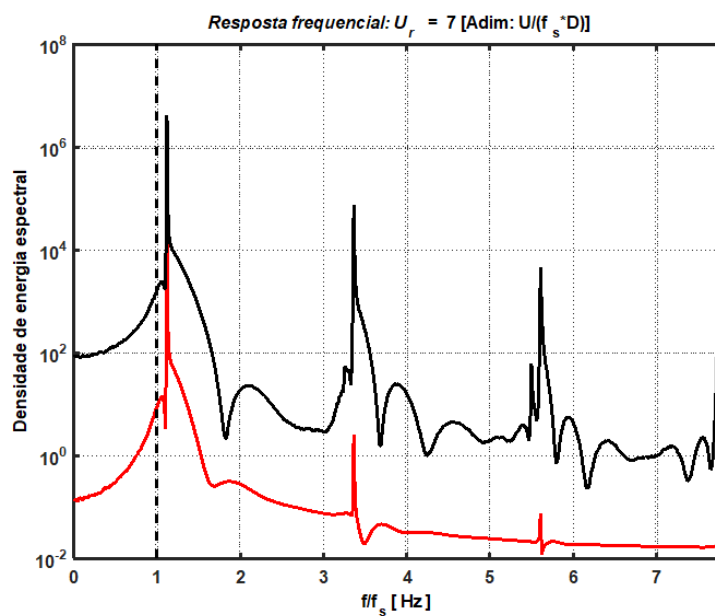


Figura B.57: Resposta frequencial para  $U_r = 7.0$  - acoplamento em deslocamento.

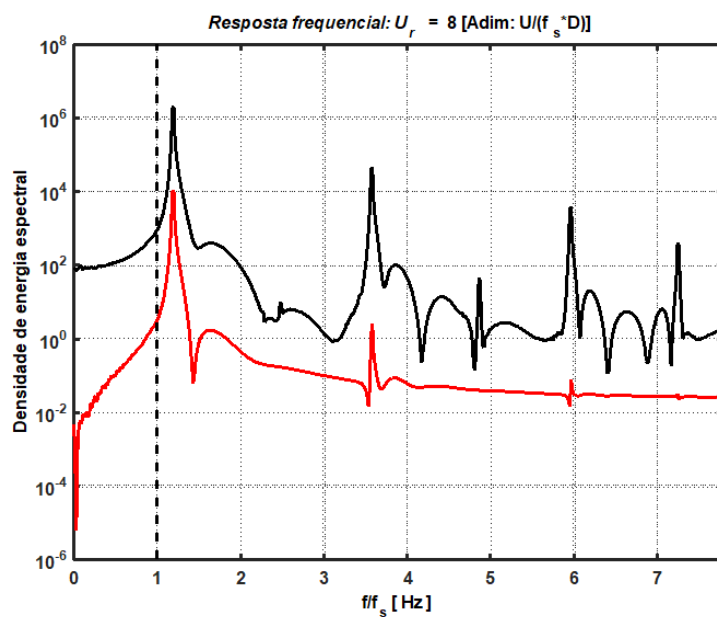


Figura B.58: Resposta frequencial para  $U_r = 8.0$  - acoplamento em deslocamento.

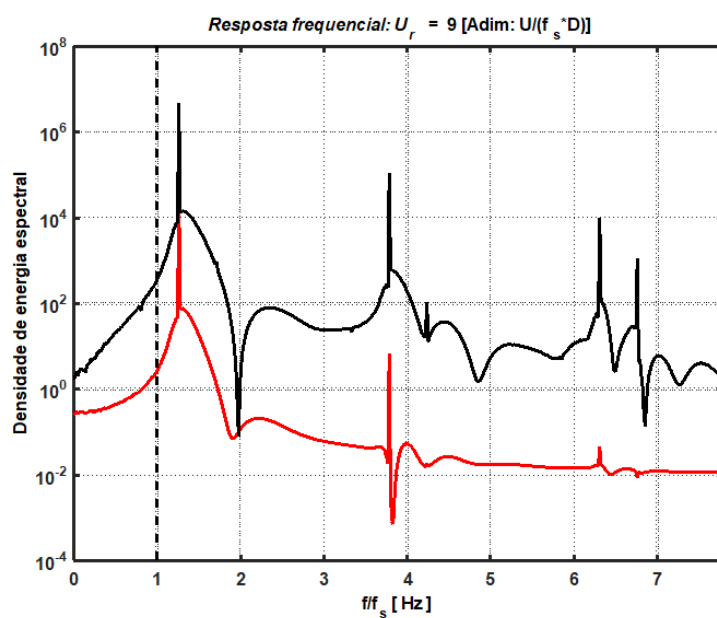


Figura B.59: Resposta frequencial para  $U_r = 9.0$  - acoplamento em deslocamento.

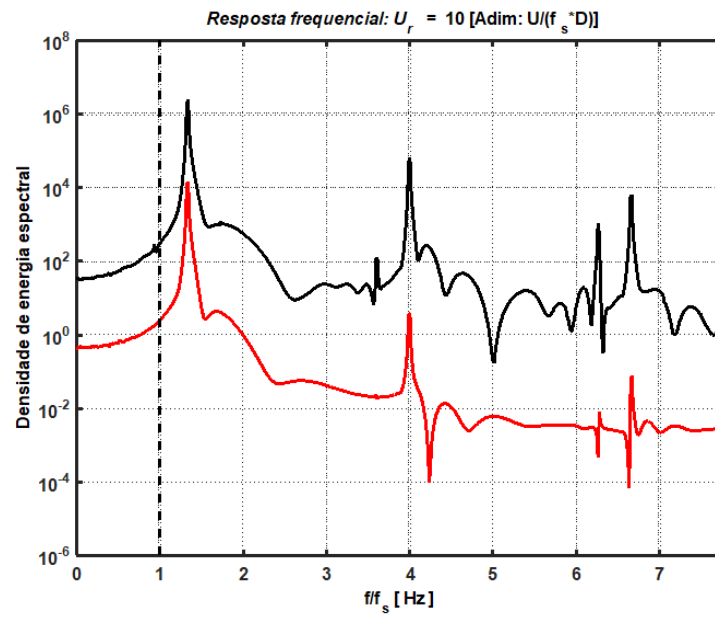


Figura B.60: Resposta frequencial para  $U_r = 10.0$  - acoplamento em deslocamento.



# Apêndice C

## Esteira forçada por uma força harmónica

### C.1 Resposta da esteira forçada harmonicamente

Determinemos a amplitude da resposta da esteira excitada por uma força harmónica de frequência  $\omega$  e de amplitude  $\|f\|$ . Suponha-se que a resposta da esteira é  $q = q_0 \cos(\omega t + \psi)$ , em que  $\psi$  representa a diferença de fase relativamente à excitação  $f$ . Consideremos, então, a Equação (3.23) e substitua-se  $q$  por  $q_0 \cos(\omega t + \psi)$ .

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q = f$$

Obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} f &= q_0 (1 - \omega^2) \cos(\omega t + \psi) + \varepsilon q_0^3 \omega \sin^3(\omega t + \psi) + (\varepsilon \omega q_0 - \varepsilon \omega q_0^3) \sin(\omega t + \psi) \\ \frac{f}{q_0} &= (1 - \omega^2) \cos(\omega t + \psi) + (\varepsilon \omega - \varepsilon \omega q_0^2) \sin(\omega t + \psi) + \varepsilon q_0^2 \omega \sin^3(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Aproximando na Equação (C.1)  $\sin^3 x$  por  $\frac{3}{4} \sin x$ :

$$\begin{aligned} \frac{f}{q_0} &= (1 - \omega^2) \cos(\omega t + \psi) + (\varepsilon \omega - \varepsilon \omega q_0^2) \sin(\omega t + \psi) + \varepsilon q_0^2 \omega \frac{3}{4} \sin(\omega t + \psi) \\ &= (1 - \omega^2) \cos(\omega t + \psi) + \left( \varepsilon \omega - \frac{1}{4} \varepsilon \omega q_0^2 \right) \sin(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

resulta (4.8):

$$\frac{\|f\|}{q_0} = \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \left(\varepsilon\omega - \frac{1}{4}\varepsilon\omega q_0^2\right)^2}$$

De onde podemos concluir que  $q_0$  é solução do polinómio bi-cúbico (4.9):

$$\left(\frac{\|f\|}{\varepsilon\omega}\right)^2 16 = q_0^6 - 8q_0^4 + 16 \left[1 + \left(\frac{1 - \omega^2}{\varepsilon\omega}\right)^2\right] q_0^2.$$

Com base nesta expressão (4.9), apresentou-se, na Figura 4.1 e no espaço  $(y_0, U_r)$  as curvas que relacionam a amplitude da excitação harmónica  $y_0$  com a frequência  $\omega$  da resposta-excitação na qual o coeficiente de amplificação  $K$  da força de sustentação desenvolvida tem o valor unitário ( $q_0 = 2$ ).

As curvas baseiam-se na adoção de acoplamentos em deslocamento, velocidade e aceleração:

$f(t) = Ay_0 \cos(\omega t)$ ,  $f'(t) = -Ay_0\omega \sin(\omega t)$  e  $f''(t) = -Ay_0\omega^2 \cos(\omega t)$ , respetivamente

Tendo em vista assegurar a comparabilidade com (Facchinetti et al., 2004) adotou-se  $A = 12$  e  $\varepsilon = 0.3$ .

# Apêndice D

## Resposta acoplada da esteira-estrutura

### D.1 Modelo adimensional referido à frequência da esteira

#### D.1.1 Oscilador fluido

Consideremos novamente a equação adimensionalizada da esteira, tendo como referência a frequência da esteira, que representa o oscilador-fluido (3.23):

$$f(t) = \frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + q$$

Suponha-se o sistema acoplado e determinemos a relação entre as amplitudes das respostas da esteira  $q = q_0 \cos(\omega t)$  e da estrutura  $y = y_0 \cos(\omega t)$ . Utilizemos, para excitar a esteira, uma combinação linear de forças harmônicas com origem no deslocamento da estrutura,  $y = y_0 \cos(\omega t - \alpha)$ , que apresenta uma diferença de fase  $\alpha$  relativamente à oscilação  $q$  do fluido (4.1):

$$f(t) = Cy_0 \cos(\omega t - \alpha) - By_0 \omega \sin(\omega t - \alpha) - Ay_0 \omega^2 \cos(\omega t - \alpha)$$

Os termos de  $f$  são proporcionais ao deslocamento, à velocidade e à aceleração da estrutura, representando  $A$ ,  $B$  e  $C$ , coeficientes de proporcionalidade a determinar.

Substituindo no primeiro membro de (3.23),  $q$  por  $q = q_0 \cos(\omega t)$ , e aproximando  $\sin^3(\omega t)$  por  $\frac{3}{4} \sin(\omega t)$ , obtemos:

$$q_0 (1 - \omega^2) \cos(\omega t) + q_0 \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \sin(\omega t) = f(t) \quad (\text{D.1})$$

Substituindo agora  $f(t)$  por (4.1) e com as devidas simplificações obtém-se:

$$f(t) = \{ (Cy_0 - Ay_0\omega^2) \cos \alpha + By_0\omega \sin \alpha \} \cos(\omega t) + \{ (Cy_0 - Ay_0\omega^2) \sin \alpha - By_0\omega \cos \alpha \} \sin(\omega t) \quad (D.2)$$

A partir de (D.1) e (D.2), deduz-se:

$$\Delta_1 \cos(\omega t) + \Delta_2 \sin(\omega t) = 0, \forall t \quad (D.3)$$

com

$$\Delta_1 = q_0 (1 - \omega^2) - (y_0 (C - A\omega^2) \cos \alpha + y_0 B\omega \sin \alpha) \quad (D.4)$$

$$\Delta_2 = q_0 \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) - (y_0 (C - A\omega^2) \sin \alpha - y_0 B\omega \cos \alpha) \quad (D.5)$$

Chegando-se, assim, às duas equações do oscilador fluido (4.2 e 4.3):

$$(C - A\omega^2) \cos \alpha + B\omega \sin \alpha = \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2)$$

$$(C - A\omega^2) \sin \alpha - B\omega \cos \alpha = \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right)$$

### D.1.2 Oscilador estrutura

Considerando agora o oscilador-estrutura, tendo como referência a frequência da esteira (3.19):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + \delta^2 y = Mq$$

com  $\lambda = 2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu}$ .

Substitua-se  $y$  por  $y = y_0 \cos(\omega t - \alpha)$  e  $q$  por  $q = q_0 \cos(\omega t)$ . Obtém-se:

$$-y_0\omega^2 \cos(\omega t - \alpha) - \lambda y_0\omega \sin(\omega t - \alpha) + \delta^2 y_0 \cos(\omega t - \alpha) = Mq_0 \cos(\omega t) \quad (D.6)$$

e chega-se a:

$$\Delta_3 \cos(\omega t) + \Delta_4 \sin(\omega t) = 0, \forall t \quad (D.7)$$

com

$$\Delta_3 = y_0 (\delta^2 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda y_0 \omega \sin \alpha - Mq_0 \quad (D.8)$$

$$\Delta_4 = y_0 (\delta^2 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda y_0 \omega \cos \alpha \quad (D.9)$$

Obtêm-se, assim, por ortogonalidade, as duas equações do oscilador estrutura (4.4 e 4.5):

$$\begin{aligned}(\delta^2 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda \omega \sin \alpha &= M \frac{q_0}{y_0}, \\ (\delta^2 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha &= 0\end{aligned}$$

Para o oscilador acoplado, obtemos assim 4 equações, duas referentes ao fluido e duas referentes à estrutura (4.7):

$$\begin{cases} (C - A\omega^2) \cos \alpha + B\omega \sin \alpha = \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \\ (C - A\omega^2) \sin \alpha - B\omega \cos \alpha = \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \\ (\delta^2 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda \omega \sin \alpha = M \frac{q_0}{y_0} \\ (\delta^2 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

## D.2 Modelo adimensional referido à frequência da estrutura

### D.2.1 Oscilador-fluido

Considerando agora a equação da esteira adimensional, tendo como referência a frequência da estrutura, que representa o oscilador-fluido (3.28):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon \Omega (q^2 - 1) \frac{dq}{dt} + \Omega^2 q = f(t).$$

Suponha-se o sistema acoplado e determinemos a relação entre as amplitudes das respostas da esteira  $q = q_0 \cos(\omega t)$  e da estrutura. Utilizando novamente a combinação de forças harmônicas com origem no deslocamento,  $y = y_0 \cos(\omega t - \alpha)$ , da estrutura que apresenta uma diferença de fase  $\alpha$  relativamente à oscilação  $q$  do fluido, para excitar a esteira (4.1):

$$f(t) = Cy_0 \cos(\omega t - \alpha) - By_0 \omega \sin(\omega t - \alpha) - Ay_0 \omega^2 \cos(\omega t - \alpha).$$

Os termos de  $f$  são proporcionais ao deslocamento, à velocidade e à aceleração da estrutura, representando  $A$ ,  $B$  e  $C$ , coeficientes de proporcionalidade a determinar.

A expressão (4.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}f(t) &= \{(Cy_0 - Ay_0 \omega^2) \cos \alpha + By_0 \omega \sin \alpha\} \cos(\omega t) \\ &+ \{(Cy_0 - Ay_0 \omega^2) \sin \alpha - By_0 \omega \cos \alpha\} \sin(\omega t).\end{aligned}\tag{D.10}$$

Substituindo no primeiro membro de (3.28),  $q$  por  $q = q_0 \cos(\omega t)$ , e aproximando  $\sin^3(\omega t)$  por  $\frac{3}{4} \sin(\omega t)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= -q_0 \omega^2 \cos(\omega t) - \varepsilon \Omega ((q_0 \cos(\omega t))^2 - 1) q_0 \omega \sin(\omega t) + \Omega^2 q_0 \cos(\omega t) \\ &= q_0 (\Omega^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \varepsilon q_0 \Omega \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (D.11)$$

A partir de (D.10) e (D.11), deduz-se:

$$\Delta_1 \cos(\omega t) + \Delta_2 \sin(\omega t) = 0, \forall t \quad (D.12)$$

com

$$\Delta_1 = q_0 (\Omega^2 - \omega^2) - (y_0 (A - C\omega^2) \cos \alpha + B y_0 \omega \sin \alpha) \quad (D.13)$$

$$\Delta_2 = \varepsilon q_0 \Omega \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) - (y_0 (A - C\omega^2) \sin \alpha - B y_0 \omega \cos \alpha) \quad (D.14)$$

Chegando-se, assim, por ortogonalidade, às duas equações do oscilador fluido:

$$q_0 (\Omega^2 - \omega^2) - (y_0 (C - A\omega^2) \cos \alpha + B y_0 \omega \sin \alpha) = 0 \quad (D.15)$$

$$\varepsilon q_0 \Omega \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) - (y_0 (C - A\omega^2) \sin \alpha - B y_0 \omega \cos \alpha) = 0 \quad (D.16)$$

### D.2.2 Oscilador-estrutura

Passando à equação do oscilador-estrutura, adimensionalizado com base na frequência da estrutura (3.26):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + y = M \Omega^2 q \quad (D.17)$$

Substitua-se  $y$  por  $y = y_0 \cos(\omega t - \alpha)$  e  $q$  por  $q = q_0 \cos(\omega t)$ . Obtém-se:

$$-y_0 \omega^2 \cos(\omega t - \alpha) - \lambda y_0 \omega \sin(\omega t - \alpha) + y_0 \cos(\omega t - \alpha) = M \Omega^2 q_0 \cos(\omega t) \quad (D.18)$$

e chega-se a:

$$\Delta_3 \cos(\omega t) + \Delta_4 \sin(\omega t) = 0, \forall t \quad (D.19)$$

com

$$\Delta_3 = y_0 (1 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda y_0 \omega \sin \alpha - M \Omega^2 q_0, \quad (D.20)$$

$$\Delta_4 = (1 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha \quad (D.21)$$

Deduz-se, então, por ortogonalidade, às duas equações do oscilador-estrutura:

$$y_0 (1 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda y_0 \omega \sin \alpha - M \Omega^2 q_0 = 0, \quad (\text{D.22})$$

$$(1 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha = 0. \quad (\text{D.23})$$

Obtemos assim as 4 equações, para o acoplamento combinado, com referência à frequência da estrutura.

$$\begin{cases} q_0 (\Omega^2 - \omega^2) - y_0 (C - A\omega^2) \cos \alpha - B y_0 \omega \sin \alpha = 0 \\ \varepsilon q_0 \Omega \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right) + B y_0 \omega \cos \alpha - y_0 (C - A\omega^2) \sin \alpha = 0 \\ y_0 (1 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda y_0 \omega \sin \alpha - M \Omega^2 q_0 = 0 \\ (1 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{D.24})$$





# Apêndice E

## Acoplamento combinado

### E.1 Equações a ajustar

Considere-se as 4 equações obtidas para o oscilador acoplado, adimensionadas com referência à frequência da esteira (4.7):

$$\begin{aligned}(\delta^2 - \omega^2) \cos \alpha + \lambda \omega \sin \alpha &= M \frac{q_0}{y_0} \\(\delta^2 - \omega^2) \sin \alpha - \lambda \omega \cos \alpha &= 0 \\(C - A\omega^2) \cos \alpha + B\omega \sin \alpha &= \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \\(C - A\omega^2) \sin \alpha - B\omega \cos \alpha &= \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left(1 - \frac{q_0^2}{4}\right)\end{aligned}$$

Com base as duas primeiras equações (4.7):

$$\begin{bmatrix} \lambda \omega & (\delta^2 - \omega^2) \\ (\delta^2 - \omega^2) & -\lambda \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \frac{q_0}{y_0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\omega}{\lambda^2 \omega^2 + \delta^4 - 2\delta^2 \omega^2 + \omega^4} & \frac{\delta^2 - \omega^2}{\lambda^2 \omega^2 + \delta^4 - 2\delta^2 \omega^2 + \omega^4} \\ \frac{\delta^2 - \omega^2}{\lambda^2 \omega^2 + \delta^4 - 2\delta^2 \omega^2 + \omega^4} & -\lambda \frac{\omega}{\lambda^2 \omega^2 + \delta^4 - 2\delta^2 \omega^2 + \omega^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \frac{q_0}{y_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$= \begin{bmatrix} M \frac{q_0}{y_0} \frac{\lambda \omega}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \\ M \frac{q_0}{y_0} \frac{\delta^2 - \omega^2}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Donde,

$$1 = \left( M \frac{q_0}{y_0} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\lambda \omega}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \right)^2 + \left( \frac{\delta^2 - \omega^2}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{1}{M \frac{q_0}{y_0}} = \frac{M \frac{q_0}{y_0}}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \quad (\text{E.4})$$

Então,

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \frac{q_0}{y_0} \frac{\lambda \omega}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \\ M \frac{q_0}{y_0} \frac{\delta^2 - \omega^2}{\lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda \omega}{M \frac{q_0}{y_0}} \\ \frac{\delta^2 - \omega^2}{M \frac{q_0}{y_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_0}{q_0} \frac{\lambda \omega}{M} \\ \frac{y_0}{q_0} \frac{\delta^2 - \omega^2}{M} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

Esta Equação (E.5) é uma forma de representar as duas primeiras Equações de (4.7) matricialmente.

Relativamente às duas últimas Equações de (4.7), estas podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} B\omega & (C - A\omega^2) \\ (C - A\omega^2) & -B\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \\ \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

de onde se pode deduzir

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B\omega \frac{q_0}{y_0} \frac{\omega^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2 \omega^2} - \varepsilon \omega \frac{q_0}{y_0} (C - A\omega^2) \frac{\frac{1}{4} q_0^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2 \omega^2} \\ B\varepsilon \omega^2 \frac{q_0}{y_0} \frac{\frac{1}{4} q_0^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2 \omega^2} - \frac{q_0}{y_0} (C - A\omega^2) \frac{\omega^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2 \omega^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.7})$$

Por outro lado, tendo em conta (E.5), pode eliminar-se  $\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$  da Equação (E.6):

$$\begin{bmatrix} B\omega & (C - A\omega^2) \\ (C - A\omega^2) & -B\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_0}{q_0} \frac{\lambda \omega}{M} \\ \frac{y_0}{q_0} \frac{\delta^2 - \omega^2}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \\ \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \frac{1}{M q_0} y_0 (C - A\omega^2) (\delta^2 - \omega^2) + \frac{B}{M} \lambda \frac{\omega^2}{q_0} y_0 \\ \frac{1}{M} \lambda \frac{\omega}{q_0} y_0 (C - A\omega^2) - \frac{B}{M} \frac{\omega}{q_0} y_0 (\delta^2 - \omega^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_0}{y_0} (1 - \omega^2) \\ \frac{q_0}{y_0} \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{M} \frac{1}{\left( \frac{q_0}{y_0} \right)^2} \{ (C - A\omega^2) (\delta^2 - \omega^2) + B \lambda \omega^2 \} = (1 - \omega^2) \\ \frac{1}{M} \frac{1}{\left( \frac{q_0}{y_0} \right)^2} \{ \lambda \omega (C - A\omega^2) - B \omega (\delta^2 - \omega^2) \} = \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

e, tendo em conta (E.4)  $\left[ \left( M \frac{q_0}{y_0} \right)^2 = \lambda^2 \omega^2 + (\delta^2 - \omega^2)^2 \right]$ , deduzir também:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2 \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1}{M} \frac{1}{\left( \frac{q_0}{y_0} \right)^2} \right)^2 \left\{ ((C - A\omega^2) (\delta^2 - \omega^2) + B\lambda\omega^2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda\omega (C - A\omega^2) - B\omega (\delta^2 - \omega^2))^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\left( \frac{q_0}{y_0} \right)^2} \left\{ (C - A\omega^2)^2 + (B\omega)^2 \right\}. \tag{E.9}
 \end{aligned}$$

Com base em (E.9), as expressões (E.7) podem escrever-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -B\omega \frac{q_0}{y_0} \frac{\omega^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2\omega^2} - \varepsilon\omega \frac{q_0}{y_0} (C - A\omega^2) \frac{\frac{1}{4}q_0^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2\omega^2} \\ B\varepsilon\omega^2 \frac{q_0}{y_0} \frac{\frac{1}{4}q_0^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2\omega^2} - \frac{q_0}{y_0} (C - A\omega^2) \frac{\omega^2 - 1}{(C - A\omega^2)^2 + B^2\omega^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -B\omega \frac{y_0}{q_0} \frac{\omega^2 - 1}{(1 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2 \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right)^2} - \varepsilon\omega \frac{y_0}{q_0} (C - A\omega^2) \frac{\frac{1}{4}q_0^2 - 1}{(1 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2 \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right)^2} \\ B\varepsilon\omega^2 \frac{y_0}{q_0} \frac{\frac{1}{4}q_0^2 - 1}{(1 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2 \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right)^2} - \frac{y_0}{q_0} (C - A\omega^2) \frac{\omega^2 - 1}{(1 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2 \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right)^2} \end{bmatrix}. \tag{E.10}
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, pode representar-se por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon\omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) & (1 - \omega^2) \\ (1 - \omega^2) & -\varepsilon\omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_0}{q_0} (C - A\omega^2) \\ \frac{y_0}{q_0} B\omega \end{bmatrix} \tag{E.11}$$

Portanto, o sistema de 4 equações inicial (4.7) pode ser escrito na seguinte forma matricial (E.12):

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{y_0}{q_0} \frac{\lambda\omega}{M} \\ \frac{y_0}{q_0} \frac{\delta^2 - \omega^2}{M} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon\omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) & (1 - \omega^2) \\ (1 - \omega^2) & -\varepsilon\omega \left( 1 - \frac{q_0^2}{4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{y_0}{q_0} (C - A\omega^2) \\ \frac{y_0}{q_0} B\omega \end{bmatrix} \tag{E.12}
 \end{aligned}$$

## E.2 Constantes conhecidas

As seguintes constantes irão permitir ajustar os dados experimentais à realidade do nosso problema. Assim, tomemos a *massa*  $m_S$  da estrutura e a *massa acrescentada*  $m_F$

$$m_F = \frac{1}{4}\pi\rho D^2 C_M$$

em que  $C_M$  representa o *coeficiente de massa acrescentada* (associado normalmente à geometria da estrutura). Relativamente a estruturas cilíndricas mostra-se que  $C_M = 1$ , (Blevins, 1990).

Considere-se o número de *Strouhal*

$$S_T = \frac{f_{s_T} D}{U}.$$

e a *frequência natural da estrutura*  $\Omega_S = \sqrt{\frac{h}{m_S + m_F}}$ , onde o parâmetro  $h$  representa a rigidez da estrutura em vácuo. A *frequência de Strouhal* será  $\Omega_{s_T} = S_T \frac{U}{D}$ . Defina-se a *frequência reduzida da estrutura*  $\delta = \frac{\Omega_S}{\Omega_{s_T}}$  e o *coeficiente de amortecimento acrescentado*  $\gamma$  por parte do fluido:

$$\gamma = \frac{C_D}{4\pi S_T}$$

que relaciona o *coeficiente de arrasto*  $C_D$  com o *número de Strouhal*  $S_T$ . Represente-se por  $\xi$ , o *amortecimento reduzido* associado à estrutura.

Relativamente ao coeficiente de arrasto, em (Pantazopoulos, 1994) propõe-se:

$$C_D = (1 + 2y_0) C_{D_0}$$

em que  $C_{D_0}$  representa o *coeficiente de arrasto estacionário* que se pode aproximar por  $C_{D_0} \approx 1.2$  (Pantazopoulos, 1994). Designando por  $Sc$  o número de Scruton e tendo em conta a Figura 11 de (Belloli et al., 2015), resultam as seguintes estimativas:

	$y_0$	$C_D$
$Sc = 0.50$	1.1	3.8
$Sc = 2.18$	0.6	2.6
$Sc = 3.60$	0.2	1.7

Por outro lado, defina-se o *quociente mássico adimensional*:

$$\mu = \frac{m_S + m_F}{\rho D^2}.$$

Então

$$\lambda = 2\xi\delta + \frac{\gamma}{\mu}$$

Representando por  $C_{L0}$  o *coeficiente de sustentação de referência* associado à libertação de vórtices (que se verifica num estrutura fixa) o parâmetro  $M$  assume a forma:

$$M = \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_T^2 \mu}.$$



# Apêndice F

## Produção científica precedente

Neste apêndice foram reunidos os diversos artigos científicos/ participações em conferências realizados no âmbito do tema IFOHAM (Iterative First Order Homotopy Analysis Method) e dos Modelos de Esteira Oscilante. Listam-se de seguida, esses contributos:

1. Jornadas do Mar 2018, Escola Naval, Novembro de 2018 - IFOHAM e a determinação de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares;
2. Encontro Anual da Investigação e Desenvolvimento em Ciências Militares, Instituto Universitário Militar, Dezembro de 2018 - Determinação de amplitudes e de frequências oscilatórias e resolução assintótica da equação de Van der Pol recorrendo ao método IFOHAM;
3. *41<sup>th</sup> Scientific Conference for Bachelor Degree Students CADET-NAV 2019*, Constança, Roménia, Abril de 2019 - *Wake Oscillator Models - a numerical study*;
4. *International Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2019*, Lisboa, Julho de 2019 - *A Generalization of Picard-Lindelöff Iteration Method - IFOHAM: Finding periodic solutions of the autonomous Van der Pol equation*;

# IFOHAM E A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES

*Marta Sacramento, Cecília Almeida*  
Portuguese Naval Academy (EN)  
e-mail: marta.sofia.sacramento@marinha.pt  
cecilia.branco.almeida@marinha.pt

*Miguel Moreira*  
Portuguese Naval Academy (EN) / Navy Research Center (CINAV)  
Centre for Marine Technology and Ocean Engineering (CENTEC)  
e-mail: miguel.moreira@marinha.pt

## Resumo

O IFOHAM (Iterative First order HAM) consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais não lineares que generaliza o método de Picard-Lindelöf e que se inspira no método HAM (Homotopy Analysis Method). Neste trabalho implementaremos esta técnica (IFOHAM) num ambiente computacional de manipulação simbólica e analisaremos e testaremos a sua aplicabilidade à resolução assintótica de equações diferenciais não lineares de 2ª ordem com soluções periódicas. Em particular, mostraremos que o método IFOHAM é capaz de identificar as frequências fundamentais de tais soluções periódicas. O conhecimento deste parâmetro tem particular importância prática nas actividades de projecto e manutenção porquanto caracteriza o comportamento oscilatório de muitos sistemas reais com respostas não-lineares. É o caso de sistemas constituídos por estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos tais como cabos submarinos, cabos de fixação de plataformas flutuantes ao fundo do oceano e tubos em permutadores de calor, por exemplo. Os resultados das simulações efectuadas serão comparados com resultados obtidos usando a técnica HAM e presentes na literatura bem como com simulações numéricas.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais não lineares, HAM, IFOHAM

## 1 Introdução

O método HAM foi desenvolvido por Shijun Liao [5] e consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais, quer ordinárias quer com derivadas parciais. Esta técnica baseia-se no conceito de homotopia e transforma o problema original

$$N[u] = 0$$



numa família de problemas caracterizados pelas equações diferenciais lineares que seguidamente se apresentam

$$\mathcal{L}[u_1(t)] = c_0 [N[u_0(t)]], \quad (1)$$

$$\mathcal{L}[u_m(t) - u_{m-1}(t)] = c_0 \mathcal{D}_{m-1} [N[\phi(t; q)]], \quad m \in \mathbb{N} \text{ and } m > 1. \quad (2)$$

A resolução recorrente de (1) e (2) permite obter os sucessivos termos da solução procurada:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(t). \quad (3)$$

De referir que  $\mathcal{L}$  representa um apropriado operador linear,  $u_0 = u_0(t)$  representa uma estimativa inicial do problema original,  $c_0$  representa um parâmetro que controla a convergência/velocidade de convergência do método,  $\mathcal{D}_k$  representa o operador de derivação homotópica de ordem  $k$  definido por

$$\mathcal{D}_k = \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial q^k} \right|_{q=0} \quad (4)$$

e  $\phi(t; q)$  representa a chamada série homotópica de Maclaurin que tem a forma:

$$\phi(t; q) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) q^n, \quad q \in [0, 1]. \quad (5)$$

Nas obras [3], [4] e [1] pode consultar-se a explicação dos detalhes acima referidos bem como numerosas aplicações ilustrativas, quer introdutórias, quer avançadas.

É importante mencionar o método HAM apresenta as seguintes particularidades que lhe conferem vantagens relativamente a outras técnicas assintóticas de resolução de problemas não-lineares:

- É possível melhorar a rapidez de convergência ou mesmo garantir a convergência do método escolhendo adequadamente o valor do parâmetro  $c_0$ ;
- Existe flexibilidade na escolha do operador linear  $\mathcal{L}$  e na estimativa inicial  $u_0 = u_0(t)$  do problema original;
- Capacidade para abordar e resolver equações diferenciais fracamente não lineares quer fortemente não lineares.
- Capacidade para determinar a amplitude e a frequência de soluções periódicas de problemas não-lineares.

Destes factos, entre outros, o método HAM tem sido profusamente aplicado pela comunidade científica nos últimos anos na resolução de problemas não-lineares.

## 2 O método IFOHAM

O IFOHAM (Iterative First order HAM) consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais não lineares que generaliza o método de Picard-Lindelöf e que se inspira no método HAM (Homotopy Analysis Method).

Na abordagem do seguinte PVI (Problema de Valores Iniciais) de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^{(0)} \end{cases}, \quad (6)$$

recorrendo ao HAM e tendo por base o pressuposto que a resolução da equação (1)

$$u_1(t) = c_0 \mathcal{L}^{-1} [N[u_0(t)]]$$

conduz a uma melhor aproximação

$$u_0(t) + u_1(t)$$

da solução procurada, somos conduzidos ao algoritmo que designámos por IFOHAM (consulte-se [6] para uma descrição mais pormenorizada deste método):

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0^{(0)} \\ \mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 [N[\sum_{k=0}^n u_k(t)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(t_0) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n = \sum_{k=0}^n u_k(t) \end{cases}. \quad (7)$$

Em [6] mostra-se que se  $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{dh}{dt}(t)$ ,

$$N[x] \equiv \frac{dx}{dt} - f(t, x), \quad (8)$$

então (7), é equivalente ao processo

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = (1 + c_0)x_n(t) - c_0 \left( x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi \right), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

que generaliza o método iterativo de Picard-Lindelöf. Se  $c_0 = -1$ , esta técnica coincide exactamente com o atrás referido processo iterativo de Picard-Lindelöf, como se pode imediatamente observar:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Mostrou-se em [6] que o parâmetro  $c_0$  influenciava a velocidade de convergência do método IFOHAM aplicado a esta classe de problemas (8) e que a sua escolha adequada permitia melhorar o desempenho da técnica.

Em [6] conjectura-se a extensão da aplicabilidade do IFOHAM na resolução problemas que o método HAM já resolve entre os quais a possibilidade de determinação da frequência fundamental de soluções periódicas de problemas não lineares. Neste trabalho focar-nos-emos na abordagem deste problema com recurso ao IFOHAM.

### 3 Formulação do problema

Consideremos o problema detalhadamente estudado em [4] e descrito pela equação diferencial não linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (11)$$

munida das condições iniciais

$$x(0) = x^* \text{ e } \frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (12)$$

No Capítulo 2 de [4] é efectuado o estudo qualitativo deste problema não-linear através do qual são determinados os intervalos de valores de  $\lambda$  e  $\varepsilon$  para os quais o problema em questão apresenta soluções periódicas. O conhecimento da frequência fundamental  $\omega$  característica de tais soluções periódicas é particularmente importante. Esse conhecimento permite, não só, materializar a expressão da solução em termos de uma bem apropriada série trigonométrica, como também, é de enorme importância prática.

A determinação de soluções periódicas de diferentes ordens com recurso ao HAM, das correspondentes médias quadradas dos resíduos e das frequências fundamentais é realizada por Liao no trabalho anteriormente referido tendo por base diferentes valores dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x(0) = x^*$ , nomeadamente:

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$
A	$\frac{9}{4}$	1	1
B	0	1	1
C	4	-1	-1

Tabela 1: Parâmetros utilizados nos testes A, B e C.

Tendo em vista comparar os resultados obtidos com o método IFOHAM e com o método HAM, utilizaremos aqui os valores dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x(0) = x^*$  acima tabelados.

Na abordagem do problema (11) recorrendo ao IFOHAM, à semelhança do que acontece quando se recorre ao HAM, torna-se necessário efectuar a mudança de variável  $\tau = \omega t$  e definir

$$x(t) = y(\tau), \quad (13)$$

para evidenciar no problema equivalente resultante desta mudança de variável a frequência fundamental  $\omega$  ainda desconhecida. Como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad (14)$$

a expressão (11) pode ser reescrita na forma (fazendo  $\gamma = \omega^2$ )

$$\gamma \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0, \quad (15)$$

munida das condições iniciais agora associadas à função  $y = y(\tau)$ :

$$y(0) = x^* \text{ e } \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (16)$$

Uma vez determinada a função  $y = y(\tau)$ , solução da equação diferencial (15), a solução procurada  $x = x(t)$ , da equação diferencial (11), será simplesmente

$$x = x(t) = y(\omega t). \quad (17)$$

## 4 Utilização do algoritmo IFOHAM

Na materialização da aplicação do algoritmo IFOHAM à resolução de (15), isto é

$$N[\gamma, y] = \gamma \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0, \quad (18)$$

seguiremos procedimentos comuns aos utilizados na aplicação da técnica HAM no tocante ao estabelecimento da *regra de construção da expressão da solução*, na escolha do *operador linear*  $\mathcal{L}$  e na *escolha da aproximação*  $u_0 = u_0(\tau)$  da solução procurada. Estes procedimentos encontram-se justificados no Capítulo 2 de [4] e também, por exemplo em [2]. Ter-se-á, então

$$\begin{cases} u_0(\tau) = x^* \cos \tau \\ \gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[\gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(\tau_0) = 0 \text{ e } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (19)$$

com

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (20)$$

O procedimento que utilizaremos para determinar os sucessivos termos  $\gamma_n$  desconhecidos no processo (19) seguirá a abordagem adoptada e justificada, por exemplo, em [2]. Este procedimento tem por base a eliminação em cada iterada dos chamados termos seculares  $\tau \cos \tau$  que decorrem da resolução da equação diferencial linear:

$$\gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ \gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (21)$$

Isto é, em cada iterada, a escolha de  $\gamma_n$  é realizada de forma a garantir que o termo  $u_{n+1}$ , a determinar, não apresenta parcelas seculares do tipo  $\tau \cos \tau$ . A origem deste procedimento tal com é referido e citado em [2] remonta a trabalhos de Lindstedt, Bohlin, Poincaré e Gyldeén.

O processo descrito, a ser convergente, conduzirá à obtenção de sucessões

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ e } y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y$$

cujos limites satisfazem o problema de valores iniciais (15) e (16).

Para melhor compreender a aplicação do método IFOHAM à resolução do problema em estudo exemplifiquemos aqui os procedimentos analíticos necessários à execução da primeira iterada.

Considerando (18) e (20) ter-se-á:

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left( \gamma_0 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + \lambda u_0 + \varepsilon u_0^3 \right). \quad (22)$$

Como  $u_0(\tau) = x^* \cos \tau$  deduzir-se-á<sup>1</sup> a expressão da equação diferencial a resolver para obter  $u_1$  e  $\gamma_0$  :

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left\{ \left( -\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} \right) \cos \tau + \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \right\}. \quad (23)$$

Ora, para que não existam termos seculares do tipo  $\tau \cos \tau$  na solução geral do problema (23) bastará garantir que

$$-\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} = 0,$$

isto é, bastará fazer

$$\gamma_0 = \lambda + \frac{3\varepsilon (x^*)^2}{4}. \quad (24)$$

Os valores concretos de  $\gamma_0$  nos casos de teste A, B e C apresentam-se na Tabela 2.

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$	$\gamma_0$
A	$\frac{9}{4}$	1	1	3
B	0	1	1	$\frac{3}{4}$
C	4	-1	-1	$\frac{13}{4}$

Tabela 2: Valores de  $\gamma_0$  correspondentes aos Testes A, B e C.

Uma vez fixado, desta forma, o valor de  $\gamma_0$  o problema a resolver reduzir-se-á a determinar  $u_1$  a partir do problema de valores iniciais resultante:

$$\begin{cases} \gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \\ u_1(0) = 0 \text{ e } u_1'(0) = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

Como se sabe, uma solução particular de (25)  $u_1^p$  será da forma

$$u_1^p(\tau) = C_1 \cos 3\tau + C_2 \sin 3\tau,$$

donde

$$u_1^p(\tau) = -\frac{c_0}{\gamma_0} \frac{\varepsilon (x^*)^3}{32} \cos 3\tau.$$

Assim, a solução geral  $u_1$  deste problema será

$$u_1(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau - \frac{c_0}{\gamma_0} \frac{\varepsilon (x^*)^3}{32} \cos 3\tau,$$

<sup>1</sup>Tenha-se em conta que  $\cos^3 \tau = \frac{1}{4} \cos 3\tau + \frac{3}{4} \cos \tau$ .

a partir da qual, tendo em conta as condições iniciais ( $u_1(0) = 0$  e  $u_1'(0) = 0$ ), deduzimos:

$$u_1(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau. \quad (26)$$

A solução completa aproximada de ordem 1 do problema será

$$y_1(\tau) = u_1(\tau) + u_0(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau + x^* \cos \tau. \quad (27)$$

Considerando  $c_0 = -1$ , a solução completa aproximada de ordem 1 do problema correspondente ao Caso A consistirá na seguinte expressão:

$$y_1(\tau) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau. \quad (28)$$

Nas iteradas seguintes  $n \geq 2$  determinar-se-iam de forma análoga os pares  $(\gamma_n, u_{n+1})$  obtendo-se desta forma (em caso de convergência) sucessões

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ e } y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y.$$

Admitida a convergência do método e recordando (17), a solução IFOHAM aproximada de ordem  $M$  do problema original (11) e (12) será simplesmente

$$x_M(t) = y_M(\sqrt{\gamma_M}t). \quad (29)$$

A metodologia seguida é análoga à utilizada na aplicação da técnica HAM, consulte-se por exemplo a página 38 de [4].

## 5 Testes e simulações numéricas

Os testes e as simulações numéricas serão realizados em MATLAB. Na implementação do algoritmo IFOHAM utilizaremos a toolbox simbólica da plataforma atrás referida. Na resolução numérica dos problemas teste utilizaremos o método Runge-Kutta associado à rotina ode45 do MATLAB. Como foi referido aplicaremos a técnica IFOHAM na resolução do problema de valores iniciais (11) e (12) escolhendo para  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x^*$  os valores indicados na Tabela 1 associados respectivamente aos casos A, B e C.

De relevar o facto de na aplicação do método IFOHAM utilizarmos em todas as simulações o valor  $c_0 = -1$  relegando para um futuro trabalho a análise da influência deste parâmetro na convergência nesta técnica.

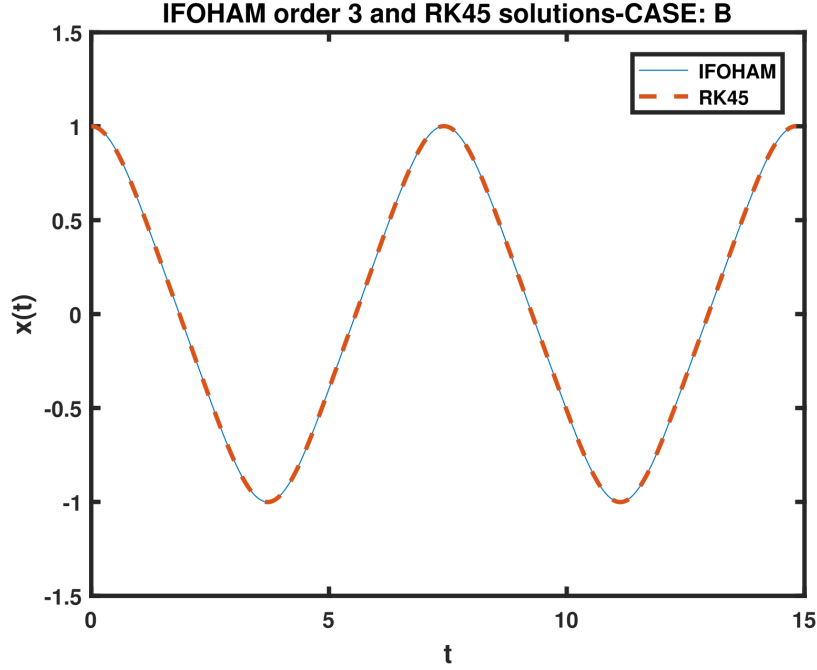


Figura 1: Solução IFOHAM aproximada de ordem 3 e solução numérica RK45. ( $\gamma = 9/4$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $x^* = 1$ ).

Nas Figuras 1, 2 e 3 representamos graficamente as soluções IFOHAM aproximadas de ordem 3 e as soluções numéricas RK45 obtidas com o método Runge-Kutta correspondentes a cada um dos casos testados: Caso A, caso B e caso C.

Na aferição da tendência de convergência calcularemos em cada iterada a versão discreta da média quadrática do resíduo calculado num período completo da solução aproximada de ordem  $M$

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N [\gamma_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (30)$$

a qual será computada da forma

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (N [\gamma_M, y_M(\tau_k)])^2}{N+1}, \quad (31)$$

em que

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \text{ e } N = 50. \quad (32)$$



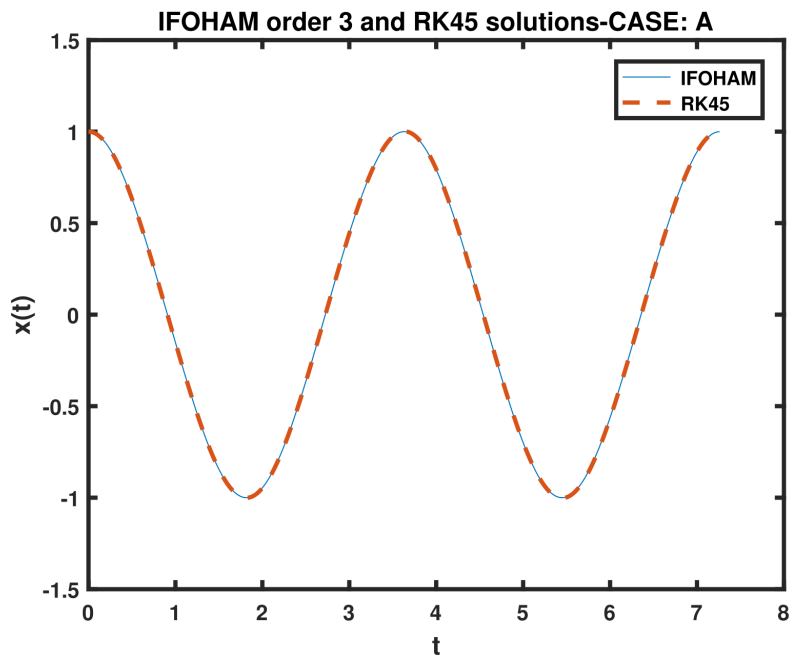


Figura 2: Solução IFOHAM aproximada de ordem 3 e solução numérica RK45.  
( $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $x^* = 1$ ).

Nas Tabelas 3, 4 e 5 apresentamos os valores obtidos com o método IFOHAM das aproximações de ordem  $M$  do quadrado da frequência angular da oscilação  $\gamma = \omega^2$ , bem como dos correspondentes valores da versão discreta da média do quadrado do resíduo  $E_M$  respeitantes a cada um dos casos de teste: Caso A, caso B e caso C.

A título ilustrativo apresentamos seguidamente a solução aproximada de ordem 1 obtida na resolução do caso A tendo por base a implementação do método IFOHAM em MATLAB num ambiente de programação simbólica:

$$x_1(t) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau \quad (33)$$

$$\text{com } \begin{cases} \tau = \sqrt{\gamma_1} t \\ \gamma_1 = 2.992350260416667 \end{cases} .$$

Como não podia deixar de ser, as expressões (28) e (33) são coincidentes.

IFOHAM-Caso A		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M(c_0 = -1)$
0	3.0000000000000000	0.031862745098039
1	2.992350260416667	0.000030759662724
2	2.992176238814215	0.000000008188297
3	2.992173084940535	0.000000000002787

Tabela 3: Valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  (quadrado da frequência) e  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo) associados às três primeiras iteradas.

IFOHAM-Caso B		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M(c_0 = -1)$
0	0.7500000000000000	0.031862745098039
1	0.721354166666667	0.000492900346247
2	0.718128571631923	0.000003750953237
3	0.717803950705108	0.000000038067810

Tabela 4: Valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  (quadrado da frequência) e  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo) associados às três primeiras iteradas.

IFOHAM-Caso C		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M(c_0 = -1)$
0	3.2500000000000000	0.031862745098039
1	3.242649778106509	0.000026979989273
2	3.242778638653018	0.000000004554289
3	3.242777081822536	0.000000000000845

Tabela 5: Valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  (quadrado da frequência) e  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo) associados às três primeiras iteradas.

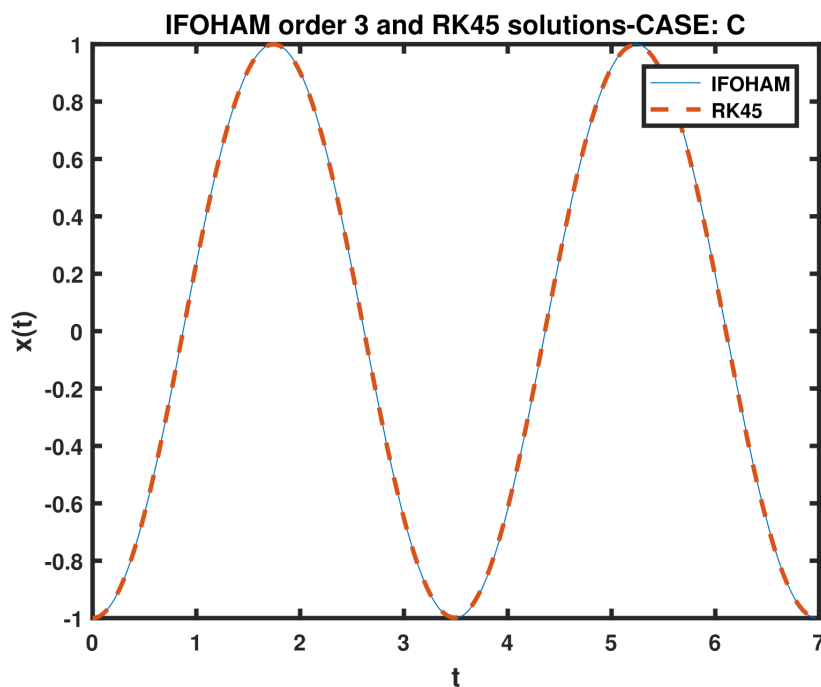


Figura 3: Solução IFOHAM aproximada de ordem 3 e solução numérica RK45.  
( $\gamma = 4$ ,  $\varepsilon = -1$  e  $x^* = -1$ ).

## 6 Discussão dos resultados

As Figuras 1, 2 e 3 mostram que as soluções aproximadas de ordem 3, do problema em estudo, obtidas recorrendo ao método IFOHAM são aparentemente coincidentes com as soluções numéricas resultantes das simulações numéricas baseadas no método Runge-Kutta de 4<sup>a</sup>/5<sup>a</sup> ordem, em todos os casos, A, B, e C, testados.

Analisando as Tabelas 3, 4 e 5 observamos uma tendência de convergência das soluções aproximadas de ordem crescente geradas pelo IFOHAM. Este facto encontra-se patente na forte diminuição dos valores da média quadrática do resíduo  $E_M$ , de iterada para iterada, que podemos constatar. A razão de diminuição deste parâmetro, de iterada para iterada, é inferior a  $10^{-2}$ , podendo assumir valores da ordem de  $10^{-4}$ . Naturalmente, esta tendência de convergência é acompanhada pela estabilização dos valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$ , sucessivamente gerados pelo método. Necessariamente, os valores aproximados das frequências  $\omega_M$  assim geradas pelo método IFOHAM serão tanto mais satis-

HAM, Liao [4]		
Caso	$\gamma_5$	$E_5(c_0)$
A ( $c_0 = -\frac{1}{3}$ )	2.9921730367	$1.3 \times 10^{-14}$
B ( $c_0 = -\frac{4}{3}$ )	0.7177741910	$1.5 \times 10^{-8}$
C ( $c_0 = -\frac{3}{10}$ )	3.2427770978	$6.7 \times 10^{-14}$

Tabela 6: Valores de  $\gamma_5 = \omega_5^2$  (quadrado da frequência) e  $E_5$  (média discreta do quadrado do resíduo) obtidos por Liao com recurso ao HAM.

fatórios quanto mais diminutas forem as médias quadrática  $E_M$  dos resíduos correspondentes.

Em [4], nas Tabelas 2.7 e 2.8, na página 47, podemos consultar os valores das médias quadráticas dos resíduos  $E_M$  e os valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  obtidos com recurso ao método HAM, na abordagem do problema em estudo (11) e (12), utilizando configurações correspondentes aos casos A, B e C. De referir que na aplicação referida do método HAM, Liao utilizou parâmetros  $c_0$  de controlo da convergência optimizados enquanto que aqui utilizámos sempre o valor  $c_0 = -1$ . Uma comparação grosseira dos valores tabelados, em [4] e aqui, sugere que as soluções aproximadas de 3ª ordem que obtivemos com o método IFOHAM apresentam um rigor substancialmente inferior às soluções aproximadas de 5ª ordem obtidas com recurso ao HAM [observe-se a Tabela 6].

Importa referir, no entanto, que os métodos IFOHAM e HAM são intrinsecamente distintos. O método IFOHAM é iterativo enquanto que o método HAM é construtivo factos que podem explicar diferenças no desempenho destas técnicas. Na implementação computacional do algoritmo IFOHAM a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem apresenta as dificuldades normalmente associadas a processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada aumentam.

## 7 Conclusões e recomendações para trabalho futuro

### 7.1 Conclusões

Tendo em conta os resultados apresentados e a discussão efectuada desenham-se as seguintes conclusões:

- O método IFOHAM apresenta-se, neste estudo preliminar, com capacidade para determinar soluções periódicas de problemas não-lineares e as correspondentes frequências oscilatórias.

- A utilização deste algoritmo é de diminuta complexidade e de fácil programação embora a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem apresente as dificuldades associadas a processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada vão aumentando.
- A opinião de que esta técnica (o método IFOHAM) é uma generalização do processo iterativo de Picard-Lindelöf é reforçada, facto este que pode ter interesse teórico.

## 7.2 Trabalho futuro

Quanto ao trabalho futuro perspectivam-se os seguintes desenvolvimentos:

- Optimizar a implementação computacional do algoritmo IFOHAM de modo a viabilizar a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem.
- Aplicação do IFOHAM à determinação das amplitudes, das frequências e soluções de outros problemas não lineares, nomeadamente da equação de van der Pol.
- Aplicação do IFOHAM à determinação das amplitudes e frequências oscilatórias de sistemas não lineares acoplados, tais como sistemas constituídos por estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos (físico-matematicamente modelados por equações estruturais acopladas à equação de van der Pol).
- Estudo das condições de convergência do IFOHAM em termos das características da equação diferencial não linear a resolver e do valor do parâmetro  $c_0$ .

## 8 Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Director de Ensino Capitão-de-mar-e-guerra Guerreiro Cardoso e ao Comandante do Corpo de Alunos Capitão-de-fragata Ferreira Teles as facilidades de trabalho autorizadas.

Agradecemos igualmente à Professora Pamela Tierney e ao Professor Nathan Doyle o apoio ao projecto em que este trabalho se insere.

## Referências

- [1] Shijun Liao. *Advances in Homotopy Analysis Method*. World Scientific, 2014.
- [2] Shijun Liao. “An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems”. Em: *Int. J. Nonlin. Mech.* 39 (2004), pp. 271–280.
- [3] Shijun Liao. *Beyond Perturbation - Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Chapman & All/CRC, 2004.
- [4] Shijun Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer, 2012.
- [5] Shijun Liao. “The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems”. Tese de doutoramento. Shangai Jiao Tong University, Shangai, China, 1992.
- [6] Miguel Moreira. “IFOHAM-an iterative algorithm based on the first-order equation of HAM: exploratory preliminary results”. Em: *Arxiv* (2017). URL: <http://arxiv.org/abs/1710.01831>.



# O OCEANO

## UMA PONTE PARA MUITAS MARGENS

### COLÓQUIO PARA ESTUDANTES

Certifica-se que nas Jornadas do Mar 2018 – O Oceano: Uma ponte para muitas margens realizadas na Escola Naval de 6 a 9 de novembro de 2018,

Cecília Almeida, Escola Naval obteve **menção honrosa no 1º escalão**, da área de Matemática,

Modelação e Engenharia com o trabalho:

**IFOHAM e a determinação de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares**

Escola Naval, 9 de novembro de 2018

O Secretário-geral do Colóquio

  
António José Duarte Costa Canas  
Capitão-de-mar-e-guerra

O Comandante da Escola Naval

  
Mário José Simões Marques  
Contra-almirante





DETERMINAÇÃO DE AMPLITUDES E DE FREQUÊNCIAS  
OSCILATÓRIAS E RESOLUÇÃO ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DE VAN  
DER POL RECORRENDO AO MÉTODO IFOHAM

**Técnicas e Tecnologias Militares**

Cecília Almeida e Marta Sacramento  
*Escola Naval/Centro de Investigação Naval (CINAV),  
2810-001 Almada, Portugal*

Miguel Moreira  
*Escola Naval/Centro de Investigação Naval (CINAV),  
Centro de Engenharia e Tecnologia Naval e Oceânica (CENTEC)  
2810-001 Almada, Portugal*

**RESUMO**

O IFOHAM (Iterative First order HAM) consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais não lineares que generaliza o método de Picard-Lindelöf e que se inspira no método HAM (Homotopy Analysis Method) e que é capaz de identificar frequências fundamentais de soluções periódicas de sistemas auto-excitados. Neste trabalho implementaremos esta técnica (IFOHAM) num ambiente computacional de manipulação simbólica e analisaremos e testaremos a sua aplicabilidade à resolução assintótica da equação de van der Pol. Em particular, mostraremos que o método IFOHAM é capaz de identificar não só frequências fundamentais de soluções periódicas da equação de van der Pol como também as amplitudes dessas soluções. Os resultados das simulações efectuadas serão comparados com resultados obtidos usando a técnica HAM e presentes na literatura bem como com simulações numéricas.

**Keywords:** Equações diferenciais não lineares, HAM, IFOHAM, Equação de van der Pol.



# 1. Introdução

O método IFOHAM é uma técnica iterativa de resolução assintótica de equações diferenciais não lineares que se inspira no método HAM (acrônimo de *Homotopy Analysis Method*) este último desenvolvido por Shijun Liao (S. Liao, 1992).

Seja  $\mathcal{L}$  um apropriado operador linear,  $c_0$  um parâmetro numérico de controlo da velocidade de convergência do processo e  $N$  o operador diferencial que caracteriza a equação diferencial não linear em estudo no seguinte sentido:

$$N[u] = 0 \Leftrightarrow \frac{d^m u}{dt^m} = f(t, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}). \quad (1)$$

O método IFOHAM consiste no processo iterativo,

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 \left[ N \left[ \sum_{k=0}^n u_k(t) \right] \right],$$

em que  $u_0 = u_0(t)$  representa uma estimativa inicial da solução e  $u_k = u_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , representam termos da série que materializará (em caso de convergência do método) a solução do problema (1):

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t). \quad (2)$$

Na abordagem do PVI (Problema de Valores Iniciais) de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^{(0)} \end{cases}, \quad (3)$$

o método IFOHAM assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0^{(0)} \\ \mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 [N[\sum_{k=0}^n u_k(t)]] , \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(t_0) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n = \sum_{k=0}^n u_k(t) \end{cases}. \quad (4)$$

Em (Moreira, 2017) mostra-se que se  $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{dh}{dt}(t)$ , então (4), é equivalente ao processo

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = (1 + c_0) x_n(t) - c_0 \left( x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi \right), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

que generaliza o método iterativo de Picard-Lindelöf. Se  $c_0 = -1$ , esta técnica coincide exactamente com o atrás referido processo iterativo de Picard-Lindelöf, como se pode imediatamente observar:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Mostrou-se também em (Moreira, 2017) que o parâmetro  $c_0$  influencia a velocidade de convergência do método IFOHAM aplicado a esta classe de problemas (3) e que a sua escolha adequada permitia melhorar o desempenho da técnica.

Em (Sacramento, Branco, & Moreira, 2018), tendo por base a abordagem do problema PVI não linear de 2ª ordem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x + \varepsilon x^3 = 0 \\ x(0) = x^* \text{ e } \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

mostrou-se que o método IFOHAM não só é capaz de gerar somas parciais de soluções aproximadas que convergem para a solução do problema (7) como também mostrámos que é capaz de aproximar assintoticamente frequências fundamentais características de instâncias diferentes deste problema. Para tal, recorreremos à mudança de variável  $\tau = \omega t$  e à definição

$$x(t) = y(\tau), \quad (8)$$

para transformar o problema original (7) no problema

$$\begin{cases} \gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0 \\ y(0) = x^* \text{ e } \frac{dy}{d\tau}(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

A aplicação do método IFOHAM à resolução do problema (9) assumiu a seguinte configuração:

$$\begin{cases} u_0(\tau) = x^* \cos \tau \\ \gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[\gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(\tau_0) = 0 \text{ e } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases} \quad (10)$$

com

$$N[\gamma, y] = \gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0 \quad (11)$$

e

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2f}{d\tau^2} + f. \quad (12)$$

Notemos que  $\gamma$  representa  $\omega^2$ , o quadrado da frequência oscilatória fundamental associada à solução do problema original. O procedimento utilizado para determinar os sucessivos termos  $\gamma_n$  desconhecidos no processo (10) seguiu a abordagem adoptada e justificada, por exemplo, em (S. Liao, 2012). Este procedimento tem por base a eliminação em cada iterada dos chamados termos seculares  $\tau \cos \tau$  que decorrem da resolução da equação diferencial linear:

$$\gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ \gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (13)$$

Admitida a convergência, o processo descrito conduzirá à obtenção de sucessões

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ e } y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y,$$

cujos limites serão o quadrado da frequência oscilatória fundamental  $\gamma$  e a solução  $y = y(t)$  do problema (7). Em cada iterada a solução IFOHAM de ordem  $M$  do problema original será simplesmente

$$x_M(t) = y_M(\sqrt{\gamma_M}t) \quad (14)$$

em que  $y_M = \sum_{k=0}^M u_k(\tau)$ . No trabalho referido (Sacramento et al., 2018) comparámos as soluções obtidas com o IFOHAM com soluções obtidas com recurso ao HAM e disponíveis na literatura (S. Liao, 2012). Os resultados foram considerados muito satisfatórios tendo resultado reforçada a convicção de que o IFOHAM generalizava efectivamente o processo de Picard-Lindelöf.

No presente trabalho, tendo por base a equação de van der Pol, estudaremos a aplicabilidade do IFOHAM à determinação quer da amplitude, quer da frequência fundamental de soluções periódicas de sistemas auto-excitados.

## 2. A equação de van der Pol

A equação de van der Pol (não forçada) é a equação diferencial não linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (15)$$

na qual o parâmetro  $\mu$  regula a intensidade do amortecimento não linear.

Esta equação foi introduzida e estudada em 1920 pelo físico Holandês Balthazar van der Pol no contexto da modelação do comportamento oscilatório da corrente eléctrica numa válvula electrónica de tipo tríodo.

O sistema dinâmico modelado pela equação de van der Pol constitui um sistema auto-excitado. Estes sistemas apresentam tipicamente de forma espontânea uma resposta oscilatória de amplitude crescente (associada a um amortecimento negativo) que evolui para um ciclo limite quando, e se, estabilizada (por efeitos não lineares). O colapso da ponte de Tacoma em 1940 constitui um exemplo paradigmático de resposta oscilatória dum sistema auto-excitado (Billah & Scanlan, 1991).

Pelo facto de numerosos e importantes fenómenos electrónicos, mecânicos, geológicos e biológicos, entre outros apresentarem comportamentos dinâmicos com respostas oscilatórias típicas de sistemas auto-excitados o estudo deste tipo de modelos é particularmente importante. A equação de van der Pol, em particular, tem sido utilizada para descrever fenómenos tais como a dinâmica de impulsos nervosos (Engelbrecht, 1992) ou a dinâmica de placas tectónicas em falhas geológicas (Cartwright, Eguíluz, Hernández-García, & Piro, 1999).

Noutros contextos a equação de van der Pol constitui um dos componentes de modelos semi-empíricos destinados a descrever fenómenos muito complexos. É o caso dos chamados "modelos de esteira oscilante" ou *wake oscillator models* que descrevem o complexo processo oscilatório observado em estruturas expostas a escoamentos transversos de fluidos. Consulte-se por exemplo Blevins (Blevins, 1990) ou Facchinetti (Facchinetti, Langre, & Biot, 2004).

Para qualquer  $\mu > 0$  a equação de van der Pol não forçada (15) tem um único ciclo limite (estável) para o qual a solução oscilatória evolui independentemente das condições iniciais (desde que diferentes da origem das coordenadas (Hafeez, Ndikilar, & Isyaku, 2015)). A solução oscilatória apresenta uma amplitude com valores próximos de 2 no ciclo limite dependendo o valor exacto dessa amplitude do valor de  $\mu$  (López, Abbasbandy, & López-Ruiz, 2008).

### 3. Estratégia para determinação da amplitude e frequência

A estratégia que adoptaremos para determinar a amplitude e a frequência da resposta oscilatória auto-excitada de (15) seguirá a estratégia definida por Liao em (S.-J. Liao, 2004) na resolução do mesmo problema recorrendo ao HAM.

Como foi referido, a equação de van der Pol tem um único ciclo limite para o qual a solução oscilatória evolui independentemente das condições iniciais. Este ciclo limite é caracterizado por uma resposta de amplitude  $a$

e frequência natural  $\omega$ . Suponha-se então e sem perda de generalidade que  $x(0)$  assume precisamente o valor  $a$  da amplitude (por agora desconhecido)

$$x(0) = a. \quad (16)$$

Para fechar o problema postule-se adicionalmente

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (17)$$

Seguidamente efectue-se a mudança de variável  $\tau = \omega t$  e defina-se

$$x(t) = ay(\tau), \quad (18)$$

para evidenciar no problema equivalente resultante desta mudança de variável a amplitude oscilatória  $a$  e a frequência fundamental  $\omega$  desconhecidas. Como

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \frac{dy}{d\tau} \quad (19)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad (20)$$

a expressão (15) pode ser reescrita na forma equivalente

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu(a^2y^2 - 1)\omega \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (21)$$

munida das condições iniciais agora associadas à nova função  $y = y(\tau)$ , solução do problema (21):

$$y(0) = 1 \text{ e } \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (22)$$

Uma vez determinada a função  $y = y(\tau)$ , solução da equação diferencial (21), a solução procurada  $x = x(t)$ , da equação diferencial (7), será simplesmente

$$x = x(t) = ay(\omega t). \quad (23)$$

## 4. Utilização do algoritmo IFOHAM

Defina-se seguidamente o operador  $N$  tendo em vista descrever de forma condensada o problema (21):

$$N[a, \omega, y] = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu(a^2y^2 - 1)\omega \frac{dy}{d\tau} + y. \quad (24)$$

Na aplicação da técnica IFOHAM seguiremos procedimentos comuns aos utilizados na aplicação da técnica HAM no tocante ao estabelecimento da *regra de construção da expressão da solução*, na escolha do *operador linear*  $\mathcal{L}$  e na *escolha da aproximação*  $u_0 = u_0(\tau)$  da solução procurada a qual deverá satisfazer as condições iniciais. Estes procedimentos encontram-se justificados no Capítulo 2 de (S. Liao, 2012) e também, por exemplo em (S. Liao, 2004).ou (S.-J. Liao, 2004) Ter-se-á, então

$$\begin{cases} u_0(\tau) = \cos \tau \\ \omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]] , \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(\tau_0) = 0 \text{ e } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (25)$$

com

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (26)$$

Notemos que  $u_0(\tau) = \cos \tau$  satisfaz as condições iniciais postuladas (22).

O procedimento que utilizaremos para determinar os sucessivos termos  $a_n$  e  $\omega_n$  desconhecidos no processo (25) seguirá a abordagem adoptada e justificada, por exemplo, em (S. Liao, 2004). Este procedimento tem por base a eliminação em cada iterada dos chamados termos seculares  $\tau \cos \tau$  e  $\tau \sin \tau$  que decorrem da resolução da equação diferencial linear:

$$\omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (27)$$

A origem deste procedimento tal com é referido e citado em (S. Liao, 2004) remonta a trabalhos de Lindstedt, Bohlin, Poincaré e Gylén.

O processo descrito, a ser convergente, conduzirá à obtenção de sucessões  $\{a_n\}$ ,  $\{\omega_n\}$  e  $\{y_{n+1}\}$ ,

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a \\ \omega_n &\rightarrow \omega \text{ e} \\ y_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y. \end{aligned}$$

cujos limites  $a$ ,  $\omega$  e  $y$ , satisfazem o problema de valores iniciais (21) e (22). Concomitantemente com a determinação da solução procurada (23) somos conduzidos, assim, ao conhecimento do valor dos parâmetros  $a$  e  $\omega$ .

Admitida a convergência do método e recordando (23), a solução IFOHAM aproximada de ordem  $M$  do problema original (15) com valores iniciais (16) e (17), será simplesmente

$$x_M(t) = a_M y_M(\omega_M t). \quad (28)$$

## 5. Testes e simulações numéricas

Os testes e as simulações numéricas serão realizados em MATLAB. Na implementação do algoritmo IFOHAM utilizaremos a toolbox simbólica da plataforma atrás referida. Na resolução numérica dos problemas teste utilizaremos o método Runge-Kutta associado à rotina `ode45` do MATLAB. Como foi referido aplicaremos a técnica IFOHAM à resolução do problema (15) com valores iniciais (16) e (17).

De relevar o facto de que na aplicação do método IFOHAM utilizarmos em todas as simulações o valor  $c_0 = -1$  relegando para um futuro trabalho a análise da influência deste parâmetro na convergência nesta técnica.

Nas Figuras 1, 2 e 3 representamos graficamente as soluções IFOHAM aproximadas de ordem 2 que obtidas e as soluções numéricas RK45 determinadas com o método Runge-Kutta correspondentes a cada um dos casos testados:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 1.0$ .

Na aferição da tendência de convergência do método IFOHAM calcularemos em cada iterada a versão discreta da média quadrática do resíduo num período completo, da solução aproximada de ordem  $M$ ,

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N[a_M, \omega_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (29)$$

o qual será computado da forma seguinte,

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{k=N} (N[a_M, \omega_M, y_M(\tau_k)])^2}{N+1}, \quad (30)$$

em que

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \text{ e } N = 50. \quad (31)$$

Nas Tabelas 1, 2 e 3 apresentamos os valores obtidos com o método IFOHAM das aproximações de ordem  $M$  dos valores da versão discreta da média do quadrado do resíduo  $E_M$ , da frequência angular da oscilação  $\omega_M$  bem como da amplitude  $a_M$  da resposta oscilatória, respeitantes a cada um dos casos testados:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 1.0$ .

## 6. Discussão dos resultados

As Figuras 1, 2 mostram que as soluções aproximadas de ordem 2, do problema em estudo, obtidas recorrendo ao método IFOHAM são aparentemente coincidentes com as soluções numéricas resultantes das simulações numéricas baseadas no método Runge-Kutta de  $4^a/5^a$  ordem, nos casos em que  $\mu = 0.25$

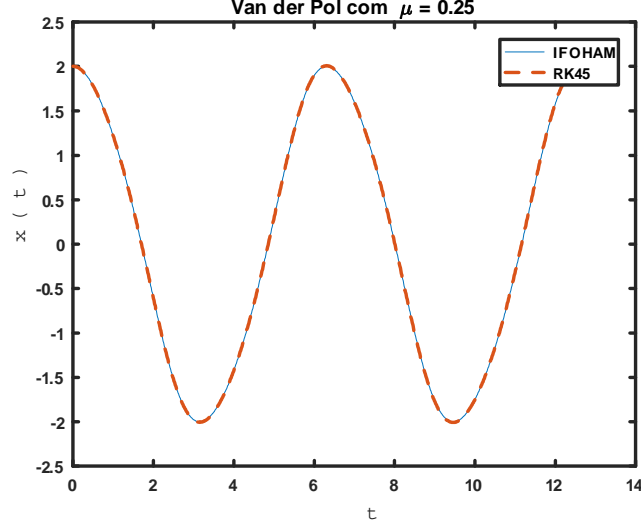


Figura 1: Solução IFOHAM aproximada de ordem 2 e solução numérica RK45. ( $\mu = 0.25$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.25$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.030637254901961	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.001797600707410	0.996244692913550	1.997947938077153
2	0.000017619444480	0.996126327784815	2.000666070870019

Tabela 1: Valores de  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo),  $\omega_M$  (quadrado da frequência) e  $a_M$  (amplitude) associados às duas primeiras iteradas ( $\mu = 0.25$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.50$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.122549019607843	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.027598653855655	0.986712903267367	1.990661336451152
2	0.001088915644987	0.984926844180597	2.002824407806937

Tabela 2: Valores de  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo),  $\omega_M$  (quadrado da frequência) e  $a_M$  (amplitude) associados às duas primeiras iteradas ( $\mu = 0.25$ ).



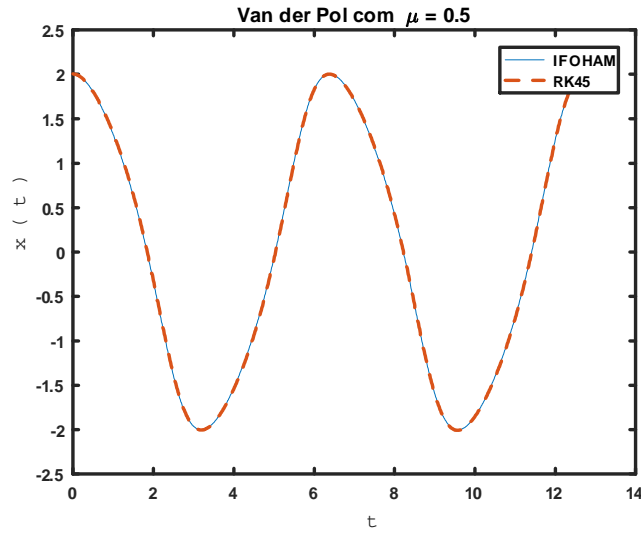


Figura 2: Solução IFOHAM aproximada de ordem 2 e solução numérica RK45. ( $\mu = 0.5$ ).

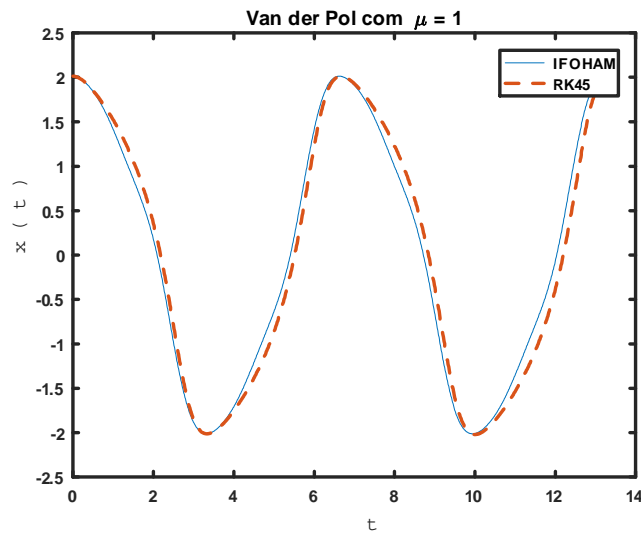


Figura 3: Solução IFOHAM aproximada de ordem 2 e solução numérica RK45. ( $\mu = 1.0$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 1.0$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.490196078431373	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.408178242095261	0.970406578035910	1.947754466672885
2	0.070306106500186	0.948058574258731	2.011425421086219

Tabela 3: Valores de  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo),  $\omega_M$  (quadrado da frequência) e  $a_M$  (amplitude) associados às duas primeiras iteradas ( $\mu = 1.0$ ).

e  $\mu = 0.5$ . Na 3, caso  $\mu = 1.0$ , claramente a solução aproximada IFOHAM de ordem 2 não acompanha satisfatoriamente a solução numérica.

Analisando as Tabelas 1, 2 e 3 observamos uma tendência de convergência das soluções aproximadas de ordem crescente geradas pelo IFOHAM. Este facto encontra-se patente na diminuição dos valores da média quadrática do resíduo  $E_M$ , de iterada para iterada, que podemos constatar. Naturalmente, esta tendência de convergência é acompanhada pela estabilização dos valores de  $\omega_M$  e  $a_M$  sucessivamente gerados pelo método. Necessariamente, os valores aproximados das frequências  $\omega_M$  e amplitudes  $a_M$ , assim geradas pelo método IFOHAM, serão tanto mais satisfatórios quanto mais diminutas forem as médias quadrática  $E_M$  dos resíduos correspondentes.

Podemos observar, à medida que  $\mu$  cresce, uma diminuição no rigor da aproximação IFOHAM de 2ª ordem obtida. Este facto explica o ajuste insatisfatório entre a solução aproximada IFOHAM de ordem 2 e a solução numérica patente na Figura 3. Refira-se que esta dificuldade se agrava com o crescimento do parâmetro  $\mu$ .

A obtenção de soluções oscilatórias mais rigorosas exige o cálculo de soluções IFOHAM aproximadas de ordem substancialmente superior a 2. Esta tarefa apresenta, no entanto, as dificuldades associadas à eficiência de processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada vão aumentando.

## 7. Conclusões e recomendações para trabalho futuro

### 7.1. Conclusões

Tendo em conta os resultados apresentados e a discussão efectuada desenham-se as seguintes conclusões:

- O método IFOHAM apresenta-se, neste estudo preliminar, com capacidade para determinar soluções periódicas da equação de van der Pol, das correspondentes frequências e amplitudes oscilatórias.
- A utilização deste algoritmo é de diminuta complexidade e de fácil programação embora a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem apresente as dificuldades associadas a processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada vão aumentando.
- A opinião de que esta técnica (o método IFOHAM) é uma generalização do processo iterativo de Picard-Lindelöf é consolidada.

## 7.2. Trabalho futuro

Quanto ao trabalho futuro perspectivam-se os seguintes desenvolvimentos:

- Optimizar a implementação computacional do algoritmo IFOHAM de modo a viabilizar a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem.
- Aplicação do IFOHAM à determinação das amplitudes e frequências oscilatórias de sistemas não lineares acoplados, tais como sistemas constituídos por estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos (físico-matematicamente modelados por equações estruturais acopladas à equação de van der Pol).
- Estudo das condições de convergência do IFOHAM em termos das características da equação diferencial não linear a resolver e do valor do parâmetro  $c_0$ .

## 8. Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à Professora Pamela Tierney e ao Professor Nathan Doyle o apoio ao projecto em que este trabalho se insere.

## Referências

Billah, K. Y., & Scanlan, R. H. (1991, feb). Resonance, Tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys.*, 2, 118-124.

- Blevins, R. D. (1990). *Flow induced vibrations* (second ed.). Malabar, FL: Krieger Publishing Co.
- Cartwright, J. H. E., Eguíluz, V. M., Hernández-García, E., & Piro, O. (1999). Dynamics of elastic excitable media. *Int. J. Bifurcation and Chaos*(9), 2197-2202.
- Engelbrecht, J. (1992, oct). Mathematical modelling of nerve pulse transmission. *Periodica Polytechnica ser. mech. Eng.*(2), 153-161.
- Facchinetti, M., Langre, E. de, & Biolley, F. (2004). Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*(19), 123-140.
- Hafeez, H. Y., Ndikilar, C. E., & Isyaku, S. (2015, jul). Analytical study of the van der pol equation in the autonomous regime. *Progress in Physics*, 3, 252-255.
- Liao, S. (1992). *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*. Unpublished doctoral dissertation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China.
- Liao, S. (2004). An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 39, 271-280.
- Liao, S. (2012). *Homotopy analysis method in nonlinear differential equations*. Springer.
- Liao, S.-J. (2004). An analytic approximate approach for free oscillations for self-excited systems. *International Journal on non-linear mechanics*(39), 271-280.
- López, J., Abbasbandy, S., & López-Ruiz, R. (2008, jun). Formulas for the amplitude of the van der pol limit cycle. *arXiv*.
- Moreira, M. (2017). Ifoham-an iterative algorithm based on the first-order equation of ham: exploratory preliminary results. *Arxiv*.
- Sacramento, M., Branco, C., & Moreira, M. (2018, nov). Ifoham e a determinação de soluções periódicas de equações diferenciais não-lineares. In *Jornadas do mar 2018*.





Ministério da Defesa Nacional

Estado-Maior-General das Forças Armadas

INSTITUTO UNIVERSITÁRIO MILITAR



ENCONTRO ANUAL DA INVESTIGAÇÃO E DESENVOLVIMENTO EM CIÊNCIAS MILITARES

## DIPLOMA

Atribuído aos

Marta Sacramento

Cecília Almeida

Miguel Moreira

Na área científica de Técnicas e Tecnologias Militares, pela apresentação de poster do projeto "Determinação de Amplitudes e de Frequências Oscilatórias e Resolução Assintótica da Equação de VANDER POL recorrendo ao Método IFOHAM".

Pedrouços, 12 de dezembro de 2018

O Comandante

Edgar Marcos de Bastos Ribeiro

Vice-almirante







**„MIRCEA CEL BĂTRÂN”  
NAVAL ACADEMY**



# CERTIFICATE

*Awarded to*

**Cecilia CMEIDA**

*for participation to the 41<sup>th</sup> Scientific Conference for Bachelor Degree Students CADET-NAV 2019*

**VICE-RECTOR FOR SCIENTIFIC RESEARCH  
“MIRCEA CEL BĂTRÂN” NAVAL ACADEMY**

**Commander (N)**

**Lecturer Catalin CLINCI, Ph.D**

**12<sup>th</sup>-13<sup>th</sup> of April 2019**







**„MIRCEA CEL BĂTRÂN”  
NAVAL ACADEMY**



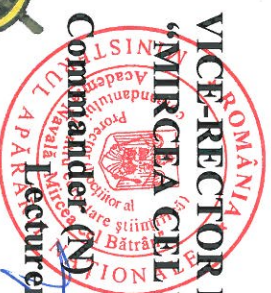
# 1st PRIZE

*Awarded to*

**CECILIA ALMEIDA, MARIA SHERNUTTE**

**from ~~POTUOCU~~ NAVAL ACADEMY section ~~FUNDAMENTAL~~ sciences**

*for their contribution to the 41<sup>th</sup> Scientific Conference for Bachelor Degree Students CADET-NAV 2019.*



**Lecturer Catalin CLINCI, Ph.D**

**12<sup>th</sup>-13<sup>th</sup> of April 2019**

# IFOHAM-a generalization of the Picard-Lindelöf iteration method

Marta Sacramento, Cecília Almeida and Miguel Moreira

**Abstract** IFOHAM (Iterative First order HAM) is an iterative technique based on the first order equation of the Homotopy Analysis Method (HAM). It can be shown that IFOHAM generalizes Picard-Lindelöf's iteration algorithm and can be used to solve nonlinear differential equations. In this work IFOHAM will be implemented in an symbolic computer environment and we will analyze and test its applicability to find series solutions of second order nonlinear differential equations with periodic solutions. In particular, we will show that the IFOHAM method is able to identify the fundamental frequencies as well as the amplitudes of such periodic solutions. Knowledge of these parameters is of particular importance in design and maintenance activities as it characterizes the oscillatory behavior of many real systems with nonlinear responses. The results of tests performed using the IFOHAM method will be compared with results available in the literature using the HAM as well as with results obtained using classical numerical techniques to solve differential equations.

## 1 Introduction

The HAM (Homotopy Analysis Method) was developed by Shijun Liao [4] and consists in an analytic approximation method [11] to solve nonlinear ordinary differential equations as well as partial differential equations. This technique is based on the concept of homotopy and transforms the original problem:

$$N[u] = 0 \tag{1}$$

---

Marta Sacramento and Cecília Almeida

Naval Academy/Navy Research Center (CINAV), 2810-001 Almada, Portugal, e-mail: marta.sofia.sacramento@marinha.pt and cecilia.branco.almeida@marinha.pt

Miguel Moreira

Naval Academy/Navy Research Center (CINAV)/Centre of Marine Technology and Ocean Engineering (CENTEC), 2810-001 Almada, Portugal e-mail: miguel.moreira@marinha.pt



into a family of problems characterized by the following linear differential equations:

$$\mathcal{L}[u_1(t)] = c_0[N[u_0(t)]] \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[u_m(t) - u_{m-1}(t)] = c_0 \mathcal{D}_{m-1}[N[\phi(t; q)]] \quad (3)$$

with  $m \in N$  and  $m > 1$ . The recursive resolution of (2) and (3) gives the successive terms of the requested solution:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(t). \quad (4)$$

Note that  $\mathcal{L}$  represents an appropriate linear operator;  $u_0 = u_0(t)$  represents an initial solution guess of the original problem;  $c_0$  represents an appropriate convergence control parameter;  $\mathcal{D}_k$  represents the homotopic derivative operator of order  $k$  defined by:

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial q^k} \Big|_{q=0}. \quad (5)$$

Finally,  $\phi(t; q)$  represents the homotopy Maclaurin series reading:

$$\phi(t; q) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) q^n, \quad q \in [0, 1]. \quad (6)$$

In the works [6], [7] and [8], the explanation of the applications details of HAM, as well as, numerous illustrative applications, both introductory and advanced, can be consulted.

It's important to mention that the HAM has the following features, that gives advantages over other asymptotic nonlinear problem solving techniques:

- Guarantee of convergence by adequately choosing  $c_0$ , the convergence control parameter;
- Flexibility on the choice of base functions and decide about the solution expression by adequately choosing  $\mathcal{L}$  and the initial guess  $u_0(t)$ ;
- Great generality of application ranging from solving weakly to strong nonlinear differential equations or even fractional differential equations;
- Ability to find important parameters, such as amplitude and frequency, of periodic solutions of nonlinear problems.

Of these facts, among others, the HAM has been widely applied by the scientific community in recent years in solving nonlinear problems.

## 2 The IFOHAM method

The IFOHAM (Iterative First order HAM) is an asymptotic technique for solving nonlinear differential equations that generalizes the Picard-Lindelöf's method and

is inspired by the HAM (Homotopy Analysis Method). Indeed, in addressing the first order Initial Value Problem (IVP)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^{(0)} \end{cases}, \quad (7)$$

based on HAM, one can find

$$u_1(t) = c_0 \mathcal{L}^{-1} [N[u_0(t)]] \quad (8)$$

from (2). Assuming the convergence of (4), one can conjecture that

$$u_0(t) + u_1(t) \quad (9)$$

leads to a better initial guess than the (postulated) original one,  $u_0(t)$ . We are thus led to the iterative algorithm we call IFOHAM (see [10], for a more detailed description of this method):

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0^{(0)} \\ \mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 [N[\sum_{k=0}^n u_k(t)]] , \quad n \geq 0 \\ \text{with } u_k(t_0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n = \sum_{k=0}^n u_k(t) \end{cases}. \quad (10)$$

It is demonstrated in [10] that, if

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{dh}{dt}(t), \quad (11)$$

and

$$N[x] \equiv \frac{dx}{dt} - f(t, x), \quad (12)$$

then, the iterative algorithm IFOHAM (10), is equivalent to the following algorithm

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = (1 + c_0)x_n(t) - c_0 \left( x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi \right), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

which generalizes the Picard-Lindelöf's iterative method. Clearly, if  $c_0 = -1$ , this technique (13) coincides exactly with the aforementioned Picard-Lindelöf's iterative process, as we can immediately observe:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

It was shown in [10] that the parameter  $c_0$  also influences the convergence speed of IFOHAM applied to the family of problems described by (12). So, the proper choice of  $c_0$  allows to improve the performance of the IFOHAM method.

In [10] it is conjectured the applicability of IFOHAM in solving problems already addressed and solved by the method HAM, such as, second order problems. The applicability of IFOHAM in determining the fundamental frequency, as well as, amplitudes of periodic solutions of nonlinear problems is also conjectured. In order to address these issues we will focus here on the autonomous Duffing equation and on the van der Pol equation.

### 3 Autonomous Duffing equation

The Duffing equation is typically a second order non-linear differential equation with a cubic polynomial stiffness term, as well as, a linear viscous type damping term [2]. This nonlinear equation was introduced by Georg Duffing in 1918 as a result of his work in forced vibrations in a system with a cubic softening nonlinearity. The autonomous Duffing equation can display an interesting self-oscillatory behavior.

Consider the autonomous Duffing equation studied in detail in [7] and described by the second-order nonlinear differential equation.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (15)$$

with the initial conditions,

$$x(0) = x^* \quad (16)$$

and

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (17)$$

In Chapter 2 of [7] the qualitative study of this nonlinear problem is performed, through which the ranges of values of  $\lambda$  and  $\varepsilon$  are determined, so that the problem in question presents periodic solutions. The knowledge of the fundamental frequency  $\omega$ , characteristic of such periodic solutions is particularly important. This is because not only enables the expression of the solution in terms of a well-suited trigonometric series, but it also has an enormous practical importance.

The determination of periodic solutions of different orders using HAM, the corresponding square means of the residual and the fundamental frequencies is performed by Liao in the aforementioned work for different parameter values  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  and  $x(0) = x^*$ . In order to compare the results obtained with the IFOHAM and the HAM, we will use the values of the parameters  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x(0) = x^*$  shown in Table 1.

**Table 1** Parameters used in tests A, B and C.

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$
A	$\frac{9}{4}$	1	1
B	0	1	1
C	4	-1	-1

### 3.1 Strategy for determining the frequency using IFOHAM

As with using the HAM method, in approaching the problem (15) using IFOHAM, it becomes necessary to make the variable transformation  $\tau = \omega t$  and define

$$x(t) = y(\tau), \quad (18)$$

to highlight, in the equivalent problem resulting from this change of variable, the fundamental frequency  $\omega$ . Then,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad (19)$$

and the expression (15) can be rewritten (doing  $\gamma = \omega^2$ ) in the form

$$\gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0. \quad (20)$$

The corresponding initial conditions that must be satisfied by the function  $y = y(\tau)$  will be

$$y(0) = x^* \quad (21)$$

and

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (22)$$

From  $y = y(\tau)$ , the sought solution  $x = x(t)$ , of the differential equation (15), will simply be

$$x = x(t) = y(\omega t). \quad (23)$$

### 3.2 Using the IFOHAM Algorithm

In order to apply the IFOHAM algorithm, define

$$N[\gamma, y] = \gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0, \quad (24)$$

and let's follow the procedures adopted by the HAM users regarding the establishment of the rule of construction of the expression's solution, choosing an appropriate

linear operator  $\mathcal{L}$  and choosing an initial guess  $u_0 = u_0(\tau)$  of the sought solution. The motivation for such choices can be found in Chapter 2 of [7] and also, for example, in [5]. We will then have

$$\begin{cases} u_0(\tau) = x^* \cos \tau \\ \gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[\gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{with } u_k(\tau_0) = 0 \quad \text{and} \quad u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in N \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (25)$$

with

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (26)$$

The procedure we will use to determine the successive  $\gamma_n$  terms, unknown in the process (25) will follow the approach taken and justified, for example in [5]. This procedure is based on the elimination, in each iterate of the so-called secular terms  $\tau \cos \tau$  resulting from the resolution of the linear differential equation:

$$\gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ \gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (27)$$

That is, at each iteration, the choice of  $\gamma_n$  is made to ensure that the term  $u_{n+1}$ , to be determined, doesn't have secular plots of type  $\tau \cos \tau$ . The origin of this procedure, as referred to and cited in [5], dates back to works by Lindstedt, Bohlin, Poincaré and Gylden.

If the process described is convergent it will lead to sequences

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \quad \text{and} \quad y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y \quad (28)$$

whose limits satisfy the Initial Value Problem (20) and (22).

To better understand the application of the IFOHAM to solve the problem under study, we will exemplify below the analytical procedures necessary to compute the first iterate. From (24) and (26), we can deduce:

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left( \gamma_0 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + \lambda u_0 + \varepsilon u_0^3 \right). \quad (29)$$

Since  $u_0(\tau) = x^* \cos \tau$  and noting that  $\cos^3 \tau = \frac{1}{4} \cos 3\tau + \frac{3}{4} \cos \tau$  we will obtain the expression of the differential equation (30) to solve to find  $u_1$  and  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left\{ \left( -\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} \right) \cos \tau + \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \right\}. \quad (30)$$

In order to avoid the emergence of the secular terms,  $\tau \cos \tau$ , in the general solution of (30), it will be sufficient to ensure that

$$-\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} = 0,$$

that is

$$\gamma_0 = \lambda + \frac{3\varepsilon (x^*)^2}{4}. \quad (31)$$

The obtained values for  $\gamma_0$  in test cases A, B and C are shown in Table 2.

**Table 2** Values of  $\gamma_0$  in tests A, B and C.

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$	$\gamma_0$
A	$\frac{9}{4}$	1	1	3
B	0	1	1	$\frac{3}{4}$
C	4	-1	-1	$\frac{13}{4}$

Once the value of  $\gamma_0$  is set, the problem to be solved will be reduced to determine  $u_1$ , from the resulting initial values problem:

$$\begin{cases} \gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \\ u_1(0) = 0 \\ u_1'(0) = 0 \end{cases}. \quad (32)$$

A particular solution  $u_1$  of (32) is going to be

$$u_1(\tau) = C_1 \cos 3\tau + C_2 \sin 3\tau.$$

Hence,

$$u_1(\tau) = -\frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau.$$

So, the general solution  $u_1$ , of (32), will be

$$u_1(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau,$$

from which, taking into account the initial conditions ( $u_1(0) = 0$  e  $u_1'(0) = 0$ ), we deduce:

$$u_1(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau. \quad (33)$$

The approximate order 1, complete solution of the problem, will be:

$$y_1(\tau) = u_1(\tau) + u_0(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau + x^* \cos \tau. \quad (34)$$

Considering  $c_0 = -1$ , the approximate order 1, complete solution of the problem defined by Case A, will be:

$$y_1(\tau) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau. \quad (35)$$

The calculation of the following  $n \geq 1$  terms, the pairs  $(\gamma_n, u_{n+1})$  will be determined a similarly way, thus obtaining (in case of convergence) sequences

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \quad \text{and} \quad y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y.$$

Assuming the convergence of the method and remembering (23), the approximate  $M$ -order IFOHAM solution of the original problem (15) and (17), will simply be:

$$x_M(t) = y_M(\sqrt{\gamma_M t}). \quad (36)$$

The methodology followed is analogous to the methodology adopted in the application of the HAM technique, see for example page 38 of [7].

### 3.3 Tests and numerical simulations

The tests and numerical simulations will be performed in MATLAB. In the implementation of the IFOHAM algorithm we will use the symbolic toolbox of the referred platform. In the numerical resolution of the test problems we will use the Runge-Kutta method associated with the MATLAB `ode45` routine. As mentioned, we will apply the IFOHAM technique to solve the initial values problem (15) and (17) by choosing for  $\lambda$ ,  $\varepsilon \in x^*$  the values indicated in Table 1, respectively, associated with cases A, B and C.

It is noteworthy that in the application of the IFOHAM we used, in all simulations, the value  $c_0 = -1$  relegating for future work the analysis of the influence of this parameter on the convergence of this technique.

In Figures 1, 2 and 3 we plot the approximate order 3 IFOHAM solutions and the corresponding RK45 numerical solutions obtained with the Runge-Kutta method. to each case tested: Case A, Case B, and Case C.

In measuring the convergence trend we will calculate, in each iterate, the discrete version of the quadratic mean of the residue over a complete period of the approximate order  $M$  solution (discrete squared residual):

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N[\gamma_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (37)$$

which will be computed as

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (N[\gamma_M, y_M(\tau_k)])^2}{N+1}, \quad (38)$$

where

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \quad \text{and} \quad N = 50. \quad (39)$$

In Tables 3, 4 and 5 we present the values obtained in the M-order approximations, using the method IFOHAM, of the squared angular frequency of the oscillation  $\gamma = \omega^2$ , as well as the corresponding values of the discrete squared residual  $E_M$  (38) for each one of the test cases: Case A, Case B, and Case C.

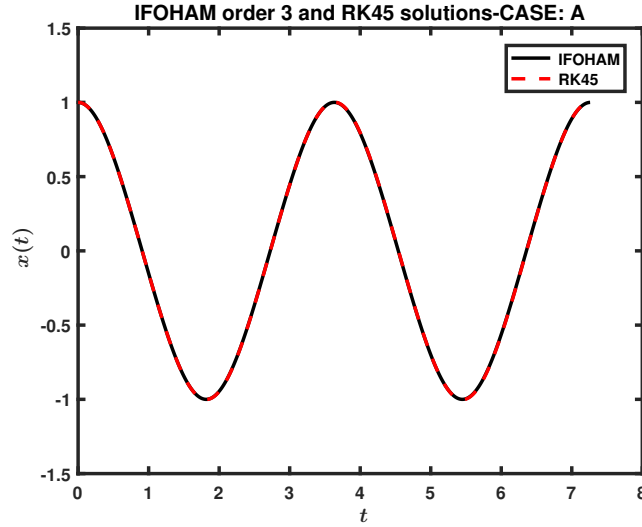
**Table 3** Values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  (squared angular frequency) and  $E_M$  (discrete squared residual) of the first 3 iterates.

IFOHAM-Case A		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	3.000000000000000	0.031862745098039
1	2.992350260416667	0.000030759662724
2	2.992176238814215	0.000000008188297
3	2.992173084940535	0.000000000002787

We present below the approximate order 1 solution obtained, in the resolution of case A, based on the implementation of the IFOHAM in MATLAB:

$$x_1(t) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau \quad \text{with} \quad \begin{cases} \tau = \sqrt{\gamma_1} t \\ \gamma_1 = 2.992350260416667 \end{cases} \quad (40)$$

Of course, the expressions (35) and (40) are coincident.



**Fig. 1** Autonomous Duffing equation: Approximate order 3 IFOHAM solution and RK45 numerical solution ( $\gamma = 9/4$ ,  $\varepsilon = 1$  and  $x^* = 1$ ).



**Table 4** Values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  (squared angular frequency) and  $E_M$  (discrete squared residual) of the first 3 iterates.

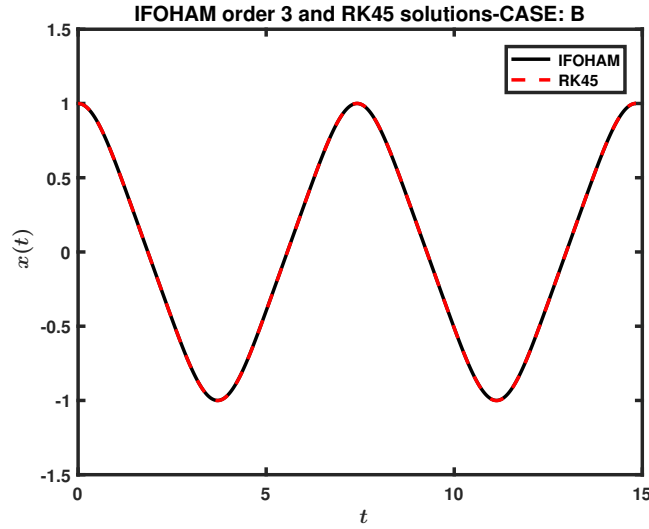
IFOHAM-Case B		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	0.7500000000000000	0.031862745098039
1	0.7213541666666667	0.000492900346247
2	0.718128571631923	0.000003750953237
3	0.717803950705108	0.00000038067810

**Table 5** Values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  (squared angular frequency) and  $E_M$  (discrete squared residual) of the first 3 iterates.

IFOHAM-Case C		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	3.2500000000000000	0.031862745098039
1	3.242649778106509	0.000026979989273
2	3.242778638653018	0.000000004554289
3	3.242777081822536	0.000000000000845

### 3.4 Discussion of results

Figures 1, 2 and 3 show that the approximate order 3 solutions of the problem under study using the IFOHAM are apparently coincident with the numerical solutions

**Fig. 2** Autonomous Duffing equation: Approximate order 3 IFOHAM solution and RK45 numerical solution ( $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  and  $x^* = 1$ ).

resulting from the numerical simulations based on the 4th / 5th order Runge-Kutta method, in all cases, A, B, and C, tested.

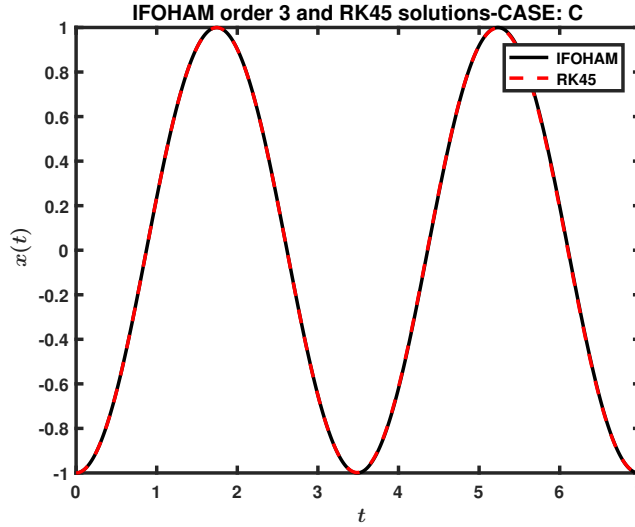
Looking at Tables 3, 4 and 5 we observe a convergence trend of the approximate solutions of increasing order generated by IFOHAM. This fact can be observed in the sharp decrease in the values of the quadratic mean of the residue  $E_M$ , from iterated to iterated. The decrease ratio of this parameter, from iterated to iterated, is less than  $10^{-2}$  and can assume values of the order of  $10^{-4}$ . Naturally, this convergence trend is accompanied by the stabilization of the values  $\gamma_M = \omega_M^2$ . Necessarily, the approximate values of the frequencies  $\omega_M$  generated by the IFOHAM, will be all the more satisfactory the smaller the quadratic mean  $E_M$  of the corresponding residues.

In Tables 2.7 and 2.8 of [7], we can access the values of the quadratic mean of the residuals  $E_M$  and the values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  obtained using HAM, addressing the problem under study (15) and (17), under the configurations corresponding to cases A, B and C.

Note that in the referred application of HAM, it was used by Liao optimized convergence control parameters  $c_0$ . In contrast, when using IFOHAM here we used the constant value convergence control parameter  $c_0 = -1$ .

A rough comparison between the tabulated values in [7] and values obtained here and displayed in Tables 3, 4 and 5 suggests that the approximate 3rd order solutions obtained using IFOHAM are substantially less accurate than the approximate 5th order solutions obtained using HAM [ see Table 6].

It should be noted, however, that the IFOHAM and HAM are intrinsically distinct. The IFOHAM is iterative while the HAM is constructive, facts that may explain differences in the performance of these techniques. In the computational im-



**Fig. 3** Autonomous Duffing equation: Approximate order 3 IFOHAM solution and RK45 numerical solution ( $\gamma = 4$ ,  $\varepsilon = -1$  and  $x^* = -1$ ).

**Table 6** Values of  $\gamma_5 = \omega_5^2$  (squared angular frequency) and  $E_5$  (discrete squared residual) from Liao using HAM.

HAM, Liao [7]		
Case	$\gamma_5$	$E_5(c_0)$
A ( $c_0 = -\frac{1}{3}$ )	2.9921730367	$1.3 \times 10^{-14}$
B ( $c_0 = -\frac{3}{4}$ )	0.7177741910	$1.5 \times 10^{-8}$
C ( $c_0 = -\frac{3}{10}$ )	3.2427770978	$6.7 \times 10^{-14}$

plementation of the IFOHAM algorithm, the automatic obtaining of higher order approximations presents the difficulties normally associated with iterative processes in which the extension / complexity of each iterate significantly increases.

## 4 Van der Pol equation

The van der Pol equation was introduced and studied in 1920 by the Dutch physicist Balthazar van der Pol in the context of modeling the oscillatory behavior of electric current in a triode type electronic valve [12].

Consider the autonomous van der Pol equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (41)$$

where  $\mu$  accounts for the intensity of nonlinear damping.

Assuming  $\mu > 0$ , the dynamics described by the autonomous van der Pol equation (41) is that of a self-excited system which evolves to a stable periodic behavior, that is, there is a single limit cycle (stable) for which the solution evolves regardless of the initial conditions [1].

The oscillatory solution has an amplitude close to 2. The exact value of the amplitude depends on the parameter  $\mu$  [9].

### 4.1 Strategy for determining the amplitude and frequency using IFOHAM

The strategy we will adopt to determine the amplitude and frequency of the self-excited oscillatory response of (41) extends the adopted steps in determining the frequency of the oscillating solution of the Duffing autonomous equation in the previous section and follow the strategy defined by Liao in [3] in solving the same problem using HAM.

As noted, the van der Pol equation has a single limit cycle for which the oscillatory solution evolves independently of the initial conditions. This limit cycle is

characterized by an amplitude response  $a$  and natural frequency  $\omega$ . Suppose then, and without loss of generality, that  $x(0)$  assumes precisely the amplitude value  $a$  (for now unknown):

$$x(0) = a. \quad (42)$$

To close the problem postulate additionally

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (43)$$

Then, assume the variable transformation  $\tau = \omega t$  and set

$$x(t) = ay(\tau) \quad (44)$$

to highlight, in the new problem, the unknown oscillatory amplitude  $a$  and the fundamental frequency  $\omega$ . Because

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \frac{dy}{d\tau} \quad (45)$$

and

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} \quad (46)$$

the expression (41) can be rewritten in the equivalent form

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu(a^2y^2 - 1)\omega \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (47)$$

with the initial conditions now associated with the new function  $y = y(\tau)$ , which is solution of the problem (47):

$$y(0) = 1 \quad \text{and} \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (48)$$

Once determined the function  $y = y(\tau)$ , solution of the differential equation (47), the sought solution  $x = x(t)$ , of the differential equation (41), will simply be

$$x = x(t) = ay(\omega t). \quad (49)$$

## 4.2 Using the IFOHAM Algorithm

Define the operator  $N$  for a condensed description of the problem. (47):

$$N[a, \omega, y] = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu(a^2y^2 - 1)\omega \frac{dy}{d\tau} + y. \quad (50)$$

In applying the IFOHAM technique we will follow procedures common to those used in applying the HAM technique regarding the establishment of the solution expression construction rule, choosing the linear operator  $\mathcal{L}$  and choosing the initial guess  $u_0 = u_0(\tau)$  of the solution sought that must meet the initial conditions. These procedures are justified in Chapter 2 of [7], as well as, for example, in [5] or [3]. Then

$$\begin{cases} u_0(\tau) = \cos \tau \\ \omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], & n \geq 0 \\ \text{with } u_k(\tau_0) = 0 \text{ and } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in N \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (51)$$

with

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (52)$$

Note that  $u_0(\tau) = \cos \tau$  satisfies the postulated initial conditions (48).

The procedure adopted to determine the sequence of iterates  $a_n$  and  $\omega_n$  in the process (51) followed the approach taken and justified, for example in [5]. This procedure is based on the elimination in each iterate of the so-called secular terms  $\tau \cos \tau$  and  $\tau \sin \tau$  resulting from the resolution of the linear differential equation:

$$\omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (53)$$

The origin of this procedure, as referred to, and cited in [5], dates back to works by Lindstedt, Bohlin, Poincaré and Gylden.

The described process, being convergent, will lead to the determination of sequences  $\{a_n\}$ ,  $\{\omega_n\}$  and  $\{y_{n+1}\}$ , such that

$$a_n \rightarrow a, \quad (54)$$

$$\omega_n \rightarrow \omega, \quad (55)$$

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y, \quad (56)$$

whose limits  $a$ ,  $\omega$  and  $y$ , satisfy the initial value problem (47) and (48). So, the determination of the sought solution (49) is accompanied by the determination of the parameters  $a$  and  $\omega$ .

Assuming the convergence of the method and remembering (49), the approximate  $M$ -order IFOHAM solution of the original initial value problem (41), (42) and (43), will simply be:

$$x_M(t) = a_M y_M(\omega_M t). \quad (57)$$

### 4.3 Tests and numerical simulations

In the elaboration of tests and numerical simulations, in this section, we will continue to use MATLAB and the corresponding symbolic toolbox, as well as, the MATLAB `ode45` numerical routine. As mentioned above, the IFOHAM technique will be applied to solve the problem (41), with initial values (42) and (43).

It is noteworthy that, in the application of the IFOHAM method, we use in all simulations the value  $c_0 = -1$  relegating for future work the analysis of the convergence influence of this parameter.

In Figures 1, 2 and 3, we plot the approximate order 2 IFOHAM solutions and the RK45 numerical solutions obtained with the Runge-Kutta method, corresponding to each tested case:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  and  $\mu = 1.0$ .

In measuring the convergence trend of the IFOHAM method, as previously done, we will calculate in each iterate the discrete version of the quadratic mean of the residue over a complete period (discrete squared residual), of the approximate solution of order  $M$ ,

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N[a_M, \omega_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (58)$$

which will be computed as follows,

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (N[a_M, \omega_M, y_M(\tau_k)])^2}{N}, \quad (59)$$

where

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \quad \text{and} \quad N = 50. \quad (60)$$

In Tables 7, 8 and 9, we present the values obtained with the IFOHAM method of the  $M$ -order discrete squared residual  $E_M$ , the angular frequency of the oscillation  $\omega_M$  as well as the amplitude  $a_M$  of the oscillatory response, for each case tested:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 1.0$ .

**Table 7** Values of  $E_M$  (discrete squared residual),  $\omega_M$  (squared angular frequency) and  $a_M$  (amplitude) of the first two iterates ( $\mu = 0.25$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.25$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.030637254901961	1.000000000000000	2.000000000000000
1	0.001797600707410	0.996244692913550	1.997947938077153
2	0.000017619444480	0.996126327784815	2.000666070870019

**Table 8** Values of  $E_M$  (discrete squared residual),  $\omega_M$  (squared angular frequency) and  $a_M$  (amplitude) of the first two iterates ( $\mu = 0.25$ ).

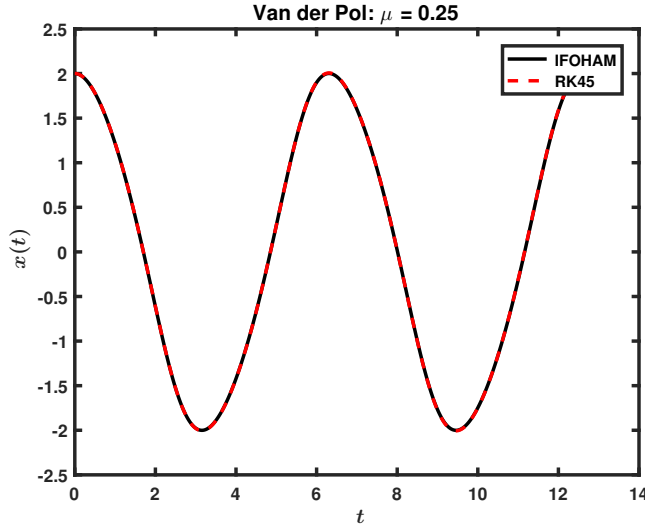
IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.50$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.122549019607843	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.027598653855655	0.986712903267367	1.990661336451152
2	0.001088915644987	0.984926844180597	2.002824407806937

**Table 9** Van der Pol equation: Values of  $E_M$  (discrete squared residual),  $\omega_M$  (squared angular frequency) and  $a_M$  (amplitude) of the first two iterates ( $\mu = 1.0$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 1.0$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.490196078431373	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.408178242095261	0.970406578035910	1.947754466672885
2	0.070306106500186	0.948058574258731	2.011425421086219

#### 4.4 Discussion of the results

Figures 4 (case:  $\mu = 0.25$ ) and 5 (case:  $\mu = 0.5$ ) show that the approximate order 2 solutions of the problem under study, obtained using the IFOHAM method, appear to coincide with the numerical solutions resulting from numerical simulations based on the 4th / 5th order Runge-Kutta method. In 6, where  $\mu = 1.0$ , clearly the

**Fig. 4** Van der Pol equation: IFOHAM approximate solution of order 2 and numerical RK45 solution ( $\mu = 0.25$ ).

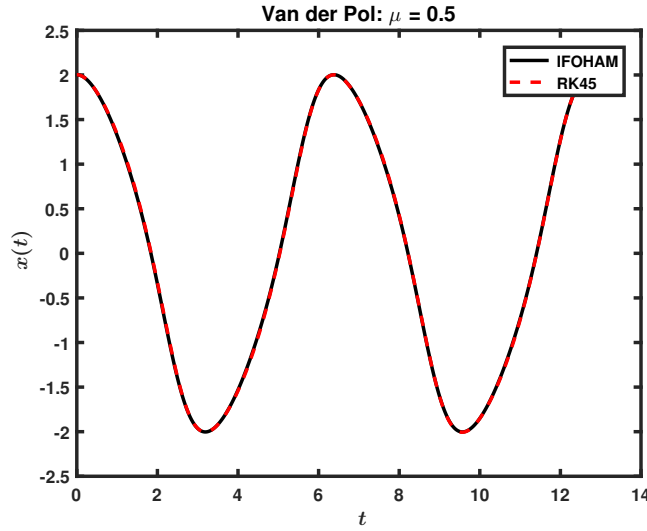
approximate order 2 IFOHAM solution does not satisfactorily follow the numerical solution.

From the observation of the discrete squared residual  $E_M$  decrease in Tables 7, 8 and 9, we observe the convergence trend of the approximate increasing order solutions generated by IFOHAM.

Of course, this convergence trend is accompanied by the stabilization of the values of  $\omega_M$  and  $a_M$  successively generated by the method. Necessarily, the approximate values of the frequencies  $\omega_M$  and amplitudes  $a_M$ , generated by the IFOHAM method, will be all the more satisfactory the smaller  $E_M$  of the corresponding discrete squared residual is.

As  $\mu$  grows, we can observe a decrease in the accuracy of the 2nd order IFOHAM approximation obtained. This explains the unsatisfactory fit between the approximate order 2 IFOHAM solution and the numerical solution shown in Figure 6. Note that this difficulty is aggravated by the growth of the parameter  $\mu$ .

Obtaining more accurate oscillatory solutions requires the calculation of approximate IFOHAM solutions of order substantially greater than 2. However, as mentioned above when discussing the results of applying this method to solve the Duffing equation, this task presents the difficulties associated with the efficiency of iterative processes in which the extent / complexity of each iterate significantly increases.



**Fig. 5** Van der Pol equation: IFOHAM approximate solution of order 2 and numerical RK45 solution ( $\mu = 0.5$ )



## 5 Conclusions and Recommendations for Future Work

### 5.1 Conclusions

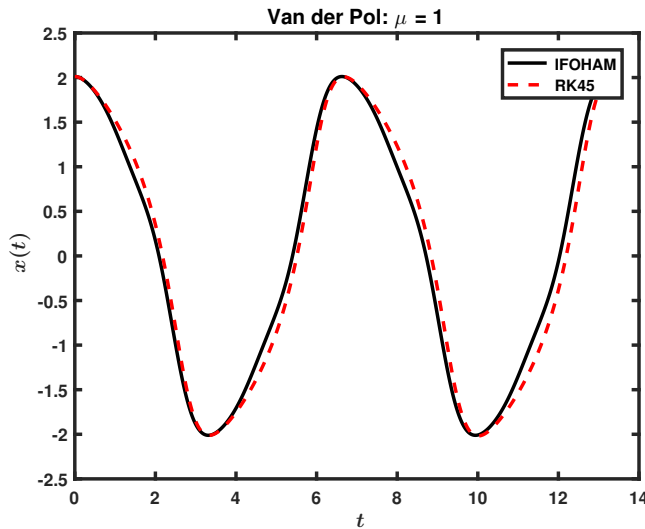
Taking into account the results presented and the discussion made, the following conclusions are drawn:

- IFOHAM can determine periodic solutions of second order nonlinear problems and the corresponding amplitudes and oscillatory frequencies;
- IFOHAM is easy to program and apply, although, getting automatic solutions of higher order approximations presents the difficulties associated with iterative processes, in which the extension / complexity of each iterate significantly increases;
- The conjecture that IFOHAM is an extension of the Picard-Lindelöf iterative method is confirmed, which may be of theoretical interest.

### 5.2 Future Work

As for future work, the following developments are expected:

- Optimize the computational implementation of the IFOHAM algorithm to enable the automatic obtaining of higher order approximate solutions;
- Use IFOHAM to study the complex dynamic of the Duffing-Holmes equation;



**Fig. 6** IFOHAM approximate solution of order 2 and numerical RK45 solution ( $\mu = 1.0$ ).

- Use IFOHAM to study and determine the amplitude and oscillatory frequencies of coupled nonlinear systems, such as wake oscillator models;
- Study the convergence behavior of IFOHAM depending on the properties of the nonlinear differential equation under consideration, as well as, as a function of the parameter  $c_0$ .

**Acknowledgements** We thank the Navy Research Center (CINAV) for their financial support in carrying out this work.


## References

1. Hafeez Y. Hafeez, Chifu E. Ndikilar, and Sabo Isyaku. Analytical study of the van der pol equation in the autonomous regime. *Progress in Physics*, 3:252–255, jul 2015.
2. Ivana Kavacic and Michael J. Brennan, editors. *The Duffing Equation, nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
3. Shi-Jun Liao. An analytic approximate approach for free oscillations for self-excited systems. *International Journal on non-linear mechanics*, (39):271–280, 2004.
4. Shijun Liao. *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, 1992.
5. Shijun Liao. An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 39:271–280, 2004.
6. Shijun Liao. *Beyond Perturbation - Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Chapman & All/CRC, 2004.
7. Shijun Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer, 2012.
8. Shijun Liao. *Advances in Homotopy Analysis Method*. World Scientific, 2014.
9. J. L. López, S. Abbasbandy, and R. López-Ruiz. Formulas for the amplitude of the van der Pol limit cycle. *arXiv*, jun 2008.
10. Miguel Moreira. IFOHAM-an iterative algorithm based on the first-order equation of HAM: exploratory preliminary results. *Arxiv*, 2017.
11. T. S. L. Radhika, T. K. V. Iyengar, and T. Raja Rani. *Approximate analytical methods for solving ordinary differential equations*. 2015.
12. Balth van der Pol. LXXXV. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom, April 1922.

08. Proceedings - Sandra Pinelas x +

https://sites.google.com/site/sandrapinelas/icddea-2019/h-proceedings

## 08. Proceedings



Selected papers of the conference will be published by Springer in the new series Proceedings in Mathematics (PROM). All submitted papers will go through a regular peer review process.  
The length of the contribution should not exceed 16 pages.

The papers have to be prepared using the Springer style and submitted as a pdf file to the address [icddea.2019@gmail.com](mailto:icddea.2019@gmail.com).  
The deadline for submission is **October 31, 2019** (see the files below).

### Editors

Sandra Pinelas, Academia Militar, Portugal

John R. Graef, University of Tennessee at Chattanooga, USA

Stefan Hilger, Katholische Universität Eichstätt, Germany

Peter Kloeden, Huazhong University of Science & Technology, China

Christos Schinas, Democritus University of Thrace, Greece

svmult.zip (572K) Sandra Pinelas, 12/07/2019, 01:54 v.1

RE: Paper - Mensagem (HTML)

Enviar

Correio Electrónico Não Solicitado • Eliminar • Responder Responder Reencaminhar a Todos • Mais • Reunir

2017\_IFOHAM\_HA... Para o Gestor  
Correio Electrónico... Concluído  
Responder e Elim... Criar Novo

Mover • Regras • OneNote • Marcar como Não Lida • Categorizar • Sinalizadores • Dar Seguimento • Traduzir • Localizar • Relacionado • Selecionar • Edição • Zoom

De: PROF AUX Miguel Moreira  
Para: "Sandra Pinelas"  
Cc: Cecilia Branco de Almeida (cbrancoa@gmail.com); 'martasofiasacramento@hotmail.com'  
Assunto: RE: Paper

Mensagem | ifoham\_icddea\_mc\_v1.pdf (304 KB) | marta\_cecilia\_icddea\_2019.zip (1 MB)

**De:** Sandra Pinelas [<mailto:icddea.2019@gmail.com>]  
**Enviada:** 1 de abril de 2020 11:12  
**Assunto:** Paper

Dear Professor

I'm glad to inform you that your paper was accepted to publication in the ICDDEA proceedings

Please, send me the TEX files as soon as possible.

Thank you very much for your work.

Best regards  
Sandra

Chair of ICDDEA 2019

Academia Militar  
Departamento de Ciências Exactas e Engenharia  
Av. Conde Castro Guimarães  
2720-113 Amadora  
Portugal  
E-mail: [sandra.pinelas@gmail.com](mailto:sandra.pinelas@gmail.com)

PROF AUX Miguel Moreira



**International Conference on  
Differential & Difference Equations and Applications 2019**

**July 1 - 5, 2019, Lisbon, Portugal**

**Certification**

We certify that **Cecília Almeida** has participated in the *International Conference on Differential & Difference Equations and Applications 2019 (ICDDEA 2019)* with presentation of a scientific paper entitled

**“A GENERALIZATION OF PICARD-LINDELÖFF ITERATION METHOD-IFOHAM:  
FINDING PERIODIC SOLUTIONS OF THE AUTONOMOUS VAN DER POL  
EQUATION”**

**By the organization**

*S. Pinelas*

Sandra Pinelas (PhD)  
Chair of the ICDDEA 2019